14　証明の形式化 5——数学の理論とはどのようなものか

ここまで，証明を形式化すること，すなわち記号列の操作として理解することについて学んできました。

しめくくりにあたり，第 2 部で学んだ数学的対象の「公理的記述」と第 3 部の「形式的証明」を組みあわせることによって，数学の「理論」を，客観的なものとして構築できることをみたいと思います。

自然数論における定理とは何か

そのことを，自然数の理論（縮めて「自然数論」ということにします*）を実例として，体験的に理解することにしましょう。

まず，自然数論の命題を書きあらわすためには適切な言語が必要でした。第 11 回ではそのような言語を二通り紹介しましたが，ここでは $\mathcal{L}'_{\mathrm{A}}$ と名づけたほうを使います。

言語 $\mathcal{L}'_{\mathrm{A}}$

- 定数記号：0
- 関数記号：suc，+，×
- 述語記号：=，<

定数記号として 0 以外に 1，2，……を用意する流儀もありましたが，そうではなく「次の自然数」をあらわす関数記号 suc を用意するだけで済ませてしまいます。ただし，

$$\mathrm{suc}(0) + \mathrm{suc}(0) = \mathrm{suc}(\mathrm{suc}(0)) \qquad (\star)$$

と書くと殺風景なので，「1」，「2」を「suc(0)」，「suc(suc(0))」の略記記号と定めて

$$1 + 1 = 2$$

と書いてもよいことにします†。

さて，これだけだと命題を記号列としてあらわせるだけで，自然数論における「定理」はえられません。議論の出発点となる「自然数論の公理系」を与える必要があります。ただし，それは形式的証明に使えなければならないので，言語 $\mathcal{L}'_{\mathrm{A}}$ を使って記述します。

---

*伝統的には「算術」（arithmetic）という言葉も使われます。

†「1」ではなく「a」とか「@」と書いてもよいはずだとミニレポートで指摘してくれた人がいました。

これは第 7 回で説明した「ペアノの公理系」を $\mathcal{L}'_{\mathrm{A}}$ によって表現し，さらに $+$，$\times$，$<$ を含む定理も証明できるように発展させたものです。

公理系 Γ_{PA}

(i) $\forall x(\neg(\mathrm{suc}(x) = 0))$

(ii) $\forall x \forall y(\mathrm{suc}(x) = \mathrm{suc}(y) \to x = y)$

(iii) $\forall x(x + 0 = x)$

(iv) $\forall x \forall y(x + \mathrm{suc}(y) = \mathrm{suc}(x + y))$

(v) $\forall x(x \times 0 = 0)$

(vi) $\forall x \forall y(x \times \mathrm{suc}(y) = x \times y + x)$

(vii) $\forall x \forall y(((x < y \lor x = y) \to x < \mathrm{suc}(y)) \land (x < \mathrm{suc}(y) \to (x < y \lor x = y)))$

(viii) $\forall x(\neg(x < 0))$

(ix) $\forall x \forall y(x < y \lor x = y \lor y < x)$

(x) x および y_1，……，y_k を自由変数としてもつあらゆる開論理式 φ について

$$\forall y_1 \cdots \forall y_k((\varphi[0/x] \land \forall x(\varphi \to \varphi[\mathrm{suc}(x)/x])) \to \forall x \varphi)$$

を公理とする。ただし，φ の自由変数が x だけである場合，これは

$$(\varphi[0/x] \land \forall x(\varphi \to \varphi[\mathrm{suc}(x)/x])) \to \forall x \varphi$$

のことであるとする。$\varphi[t/x]$ は φ 中の x に項 t を代入したものをあらわす。

そうすると，一つの立場として，自然数論における定理とは次のようなものだといってよいでしょう。

「自然数論における定理」とは，公理系 Γ_{PA} に含まれる命題（閉論理式）を仮定として，証明図を描くことによって導出できるような命題（閉論理式）のことである。

問題

次の命題が自然数論における定理であることを示す証明図を描いてください。

(1) $1 + 0 = 1$（すなわち $\mathrm{suc}(0) + 0 = \mathrm{suc}(0)$）［ヒント：(iii) と $\forall$ 除去則からすぐわかる］

(2) $0 + 1 = 1$（すなわち $0 + \mathrm{suc}(0) = \mathrm{suc}(0)$）［ヒント：(iv) と (iii) を使う］

次は $1+1=2$，すなわち $(\star)$ が定理であることを示す証明図です。「suc(0)」を「1」と略記した箇所があります。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y(x+\mathrm{suc}(y)=\mathrm{suc}(x+y))}{\forall y(1+\mathrm{suc}(y)=\mathrm{suc}(1+y))}\,\forall\text{除去}}{1+\mathrm{suc}(0)=\mathrm{suc}(1+0)}\,\forall\text{除去} \qquad \dfrac{\forall x(x+0=x)}{1+0=1}\,\forall\text{除去}}{1+\mathrm{suc}(0)=\mathrm{suc}(1)}\,\text{等号規則 2}$$

最後に，$\forall x(0+x=x)$ が定理であることを示してみましょう。(x) を $0+x=x$ という論理式に適用します（自由変数は x だけなので，「ただし」以降の内容が適用されます）。すると

$$(0+0=0\wedge\forall x(0+x=x\to 0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(x)))\to\forall x(0+x=x) \tag{$\star\star$}$$

という公理がえられます。

$\forall x(0+x=x)$ が目標であったことと $\to$ の除去則を念頭におけば，あとは

$$0+0=0\wedge\forall x(0+x=x\to 0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(x))$$

を公理からなんとか導出すれば証明図が完成するはずです。$0+0=0$ が (iii) から直ちにえられることは，すでにさっきの問題の中で使いました。あとは $\forall x(0+x=x\to 0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(x))$ ですが，これは (iv) を用いて

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[0+x=x]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\forall y(x+\mathrm{suc}(y)=\mathrm{suc}(x+y))}{\forall y(0+\mathrm{suc}(y)=\mathrm{suc}(0+y))}\,\forall\text{除去}}{0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(0+x)}\,\forall\text{除去}}{0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(x)}\,\text{等号規則 2}}{0+x=x\to 0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(x)}\,{}^{1}\ \to\text{導入}}{\forall x(0+x=x\to 0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(x))}\,\forall\text{導入}$$

のようにしてえられます。したがって，証明全体をまとめると

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(x+0=x)}{0+0=0}\,\forall\text{除去} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[0+x=x]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\forall y(x+\mathrm{suc}(y)=\mathrm{suc}(x+y))}{\forall y(0+\mathrm{suc}(y)=\mathrm{suc}(0+y))}\,\forall\text{除去}}{0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(0+x)}\,\forall\text{除去}}{0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(x)}\,\text{等号規則 2}}{0+x=x\to 0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(x)}\,{}^{1}\ \to\text{導入}}{\forall x(0+x=x\to 0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(x))}\,\forall\text{導入}}{0+0=0\wedge\forall x(0+x=x\to 0+\mathrm{suc}(x)=\mathrm{suc}(x))}\,\wedge\text{導入} \qquad (\star\star)}{\forall x(0+x=x)}\,\to\text{除去}$$

です。

第 3 部のまとめ

「証明とはいったい何か」という問いには，多様な答え方があると思います。ここでは，証明を究極的に客観的なものとみなすための考え方として，「形式的な記号列の，一定のルールにもとづく操作である」という見方を紹介し，具体的にどういうことか説明しました。

また最後に，それを第 2 部であつかった数学的対象の「公理的記述」という考え方と組みあわせました。そうして，「数学の『理論』とは，記号論理学的にいえば，言語および公理系——もしくは，それらから導出される定理たちやその導出過程の総体——のことである」という理解に達しました。

期末課題（ともに 2 月 9 日（月）23:59 締め切り）

以下の 2 つの課題を両方行い，CLE から提出してください。

1. 次のいずれかを選び，証明図を描いてください。P，Q は命題（閉論理式）とします。

   (1) $P \wedge Q \Rightarrow Q \wedge P$

   (2) $P \to Q \Rightarrow (\neg Q) \to (\neg P)$

   もしくは，次のいずれかを選び，それが自然数論（言語 $\mathcal{L}'_{\mathrm{A}}$ と公理系 Γ_{PA} にもとづくもの）の定理であることを示す証明図を描いてください。1 は suc(0) の略記です。

   (3) $\forall x(1 + x = \mathrm{suc}(x))$

   (4) $1 \times 1 = 1$

   または，自分が面白いと思った証明図を一つ，何でもよいので描いてください。

   ファイル形式は PDF，Word，JPEG のいずれかとします。ファイル名は「学籍番号_氏名_証明図.***」（***は pdf，docx，jpg/jpeg のどれか）としてください。

2. この授業で学んだことの一部，または関連して自分で学んだことについて，この授業に出席していない人にも趣旨が伝わるように，1,000 字〜2,000 字の文章にまとめてください。過去のミニレポートと内容に重複があってもかまいません。

   書いた文章は，かならず全文を読みかえして，読み手として心地よく読めて内容がわかるか，文章全体としていいたいことが明確かということを検討してください。

   A4 の PDF ファイルもしくは Word ファイルとし，名前と学籍番号を忘れずに記載してください。タイトルもつけてください。また，必ず一つ以上の文献を参考にして，参考文献として記載してください（制限字数に含めません）。

   ファイル名は「学籍番号_氏名_最終レポート.***」（***は pdf または docx）としてください。