数学の考え方（松本） 2026 年 1 月 21 日

13　証明の形式化 4——自然演繹における証明 (2)

前回，ゲンツェンの自然演繹の説明を始めました。今回は ∀ と ∃ の導入則と除去則を説明し，自然演繹における証明——すなわち証明図——とは何かという話を完結させます。

∀ の導入則，除去則

ここからは φ，ψ，……は必ずしも命題でなく，命題関数であってもよいことにします。

命題を形式的な記号列とみなすとき，そのことを強調して「閉論理式」といいました。同様に，形式的な記号列としての命題関数のことを「開論理式」といい，両者をあわせて単に**論理式**といいます。この言葉を使っていうと，φ，ψ，……はどんな論理式でもいいということです。

なお，前回の ∧，∨，¬，→ の導入則，除去則も，閉論理式にかぎらず，あらゆる論理式 φ，ψ，……について適用してよいことにします。

（∀ 導入則）
$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi[y/x]}}{\forall x\varphi}$$
（$\varphi[y/x]$ は φ 中の x を y で置きかえた論理式）

ただし，x は変数記号。また y も変数記号で，図中の $\vdots$ の部分にある解消されていない仮定に自由変数としては出現せず，$\forall x\varphi$ にも自由変数としては出現せず，しかも論理式 φ 中の x に代入可能である（φ 中の x を y で置きかえたときに，y が束縛を受ける状況になっていない）。

（∀ 除去則）
$$\dfrac{\forall x\varphi}{\varphi[t/x]}$$
（$\varphi[t/x]$ は φ 中の x を t で置きかえた論理式）

ただし，x は変数記号。また t は**項**で（つまり t は変数記号もしくは定数記号，またはそれらを関数記号や述語記号で結びつけたもの），論理式 φ 中の x に代入可能である（φ 中の x を t で置きかえたとき，t に含まれる変数が束縛を受ける状況になっていない）。

例

φ，ψ を，自由変数として x のみをもつ論理式とします。また，φ と ψ のいずれにも出現しない変数記号 y を用意しておきます。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\varphi]_1}{\varphi[y/x]} \qquad \dfrac{\forall x(\varphi \to \psi)}{\varphi[y/x] \to \psi[y/x]}}{\psi[y/x]}}{\forall x\psi}}{\forall x\varphi \to \forall x\psi}\,{}^{1}$$

∃ の導入則，除去則

（∃ 導入則）$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi}$

ただし，x は変数記号。また t は項であって，論理式 φ 中の x に代入可能である。

（∃ 除去則）$$\dfrac{\exists x\varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi[y/x]]_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \psi\end{array}}{\psi}\,1$$

ただし，x は変数記号。また y も変数記号で，$\vdots$ の上部にある $\varphi[y/x]$ 以外の解消されていない仮定に自由変数として出現せず，$\exists x\varphi$，ψ にも自由変数として出現せず，論理式 φ 中の x に代入可能である。

ついでに，$=$ は特別な述語記号として，どんな言語にも含めるものと約束し，これに関する規則を二つ設けておきます。

（等号規則 1）$\dfrac{}{t=t}$

ただし t は項。

（等号規則 2）$\dfrac{\varphi[t_1/x] \qquad t_1=t_2}{\varphi[t_2/x]}$

ただし，x は変数記号。t_1，t_2 は項であって，論理式 φ 中の x に代入可能である。

例

左の例では，言語として第 11 回の $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$ を使いました。右の例は左ページの $\forall x(\varphi \to \psi) \Rightarrow \forall x\varphi \to \forall x\psi$ の類似です。φ と ψ のいずれにも出現しない変数記号 y を用意しておきます。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x+1=x+1}}{\exists y(y=x+1)}}{\forall x\exists y(y=x+1)}$$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\varphi]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\varphi\to\psi)}{\varphi[y/x]\to\psi[y/x]} \qquad [\varphi[y/x]]_1}{\psi[y/x]}}{\exists x\psi}}{\exists x\psi}\,1}{\exists x\varphi \to \exists x\psi}\,2$$

次回予告

最後に，理論ごとに（たとえば自然数の理論，ユークリッド幾何学の理論など）あらかじめ定めた言語と公理にもとづき，その理論における「定理」を証明することについて説明します。