

12 証明の形式化3——自然演繹における証明(1)

第10回・第11回で、命題を記号列としてあらわすことについて話しました。単なる記号列とみなした命題のことを、そのことを強調して**閉論理式**とよぶことにもふれました。

ここから、証明を記号列の操作としてとらえることに関する説明を始めます。

証明図

この授業では、ゲンツェンの自然演繹とよばれる方法（1935年）を採用します。自然演繹では、「証明」とはいくつかの**推論規則**にもとづいて描かれた**証明図**（**導出図**）のことだと考えます。

推論規則には、たとえば次のようなものがあります。

$$(\wedge \text{導入則}) \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \quad (\vee \text{導入則 1}) \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \quad (\vee \text{導入則 2}) \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

ここで φ, ψ は、具体的にはどんな命題（閉論理式）でもかまいません。「水平線の上にかかれた前提（仮定）から、下にかかれた結論が証明できる」という常識的な理解を、一定の形式として取りだしたのがこれらの規則です。

\wedge, \vee の除去則は次で与えられます。[] は「仮定が解消されたこと」を示す記号です。仮定を解消するときは、「1」「2」などのラベルを添えて、証明図中のどのタイミングで解消されたのか明確にします。

$$(\wedge \text{除去則 1}) \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad (\wedge \text{除去則 2}) \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \quad (\vee \text{除去則}) \frac{\varphi \vee \psi \quad \frac{[\varphi]_1 \quad [\psi]_1}{\rho} \quad \rho}{\rho} \quad 1$$

ある仮定（または仮定の集合）からある結論を導く証明図が存在することを、この授業では \Rightarrow であらわすことにします。（きちんとした記号論理学の文献では \vdash がしばしば用いられています。）

問題

1. P, Q, R を命題とします。
 - (1) $(P \wedge Q) \wedge R \Rightarrow P$ を示す証明図を描きましょう。
 - (2) $P \vee Q \Rightarrow Q \vee P$ を示す証明図を描きましょう。

さらに \neg , \rightarrow の導入則, 除去則は次のとおりです。ただし, 記号 \perp であらわされる特別な命題 (閉論理式) を用意します。これは「矛盾」を示します。

$(\neg \text{ 導入則}) \frac{[\varphi]_1}{\frac{\perp}{\neg\varphi} \text{ }^1}$	$(\neg \text{ 除去則}) \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}$
$(\rightarrow \text{ 導入則}) \frac{[\varphi]_1}{\frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \text{ }^1}$	$(\rightarrow \text{ 除去則}) \frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$

最後に, 背理法の規則を用意します。

$(\text{背理法}) \frac{[\neg\varphi]_1}{\frac{\perp}{\varphi} \text{ }^1}$

問題

2. P, Q, R を命題とします。 $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R\} \Rightarrow P \rightarrow R$ を示す証明図を描きましょう。
3. P, Q を命題とします。
 - (1) $\neg(P \vee Q) \Rightarrow (\neg P)$ を示す証明図を描きましょう。
 - (2) $\neg(P \vee \neg P) \Rightarrow \perp$ を示す証明図を描きましょう。またそれを用いて, $\Rightarrow P \vee \neg P$ (仮定なしに $P \vee \neg P$ を証明できる) を示す証明図を描きましょう。

次回予告

次回は, \forall, \exists を含む命題の証明を扱います。

期末課題予告

期末課題として下記の内容を課すので, 準備してください (2月9日 (月) 締め切り)。第3回ミニレポートは省略します (より正確には, (1) をそれに相当するものとして扱います)。

- (1) 証明図をひとつ描く。いくつかの選択肢を1月28日に提示します。
- (2) 今学期の授業全体の内容, もしくはそれに関連して自分で学んだことから一部を選び, 1,000字~2,000字の文章にまとめる。1件以上の参考文献を含めることを必須とします。