10　証明の形式化 1——命題を記号化する (1)

ここから第 3 部に入ります。

数学の証明とは「主張の正しさを説明する作業」ですが，どの程度の説明で十分とするかが状況次第で変わってしまうようでは困ります。そのような曖昧さを排除するために，証明を「記号列の操作」としてとらえる考え方について話したいと思います。

命題を記号であらわす

真偽が定まる数学的主張のことを**命題**（proposition）といいます（本来は数学的主張に限定する必要はないのですが，ここではそうしておきます）。

たとえば，次のようなものが命題の例です。

(a) $2+3=6$ ではない。
(b) $7\times 8=54$ または $7\times 8=58$ である。
(c) $1=2$ ならば $2^{10}=0$ である。
(d) 任意の実数 x に対し $x>0$ または $-x>0$ である。
(e) $x^2=-1$ をみたす実数 x は存在しない。
(f) 111 は 3 の倍数である。

基本的な命題から複雑な命題をつくるために，次のような**論理結合子**を用います。

- $p\wedge q$ で命題「p かつ q である」をあらわす。
- $p\vee q$ で命題「p または q である」をあらわす。
- $\neg p$ で命題「p でない」をあらわす。
- $p\to q$ で命題「p ならば q である」をあらわす。

たとえば上記の (a) は $\neg(2+3=6)$ とあらわせます（このように括弧を補助記号として使うことがあります）。(b) は $7\times 8=54\vee 7\times 8=58$，(c) は $1=2\to 2^{10}=0$ です。

全称命題，存在命題

「任意の〇〇に対して△△である」という形式の命題を**全称命題**といいます。また「△△をみたすような〇〇が存在する」という形式の命題を**存在命題**（**特称命題**）といいます。

これらを ∀, ∃ という記号であらわします。より詳しくは，「任意の x に対して」を「$\forall x$」，「x が存在する」を「$\exists x$」と書きます。なお，変数の動く範囲はあらかじめ宣言しておくことにします。

たとえば (d) や (e) は，変数 x は実数をあらわすものとして，それぞれ

$$\forall x(x > 0 \vee -x > 0), \qquad \neg(\exists x(x^2 = -1))$$

と書くことができます[*]。

通常の数学では，基本的な命題から $\wedge$，$\vee$，$\neg$，$\to$ および $\forall$，$\exists$ によって作れるような命題だけが扱われます。

問題

1. (f) は，実は存在命題です。どのように書きあらわせるでしょうか。

2. 次の命題を $\wedge$，$\vee$，$\neg$，$\to$ および $\forall$，$\exists$ を用いてあらわす方法を考えてください。
   (1) $x^2 < 1$ ならば $-1 < x < 1$ である。
   (2) n が 3 の倍数でなければ，$n^2 + 2$ は 3 の倍数である。
   (3) いくらでも大きい素数が存在する。

次回予告

「通常の数学では，基本的な命題から $\wedge$，$\vee$，$\neg$，$\to$ および $\forall$，$\exists$ によって作れるような命題だけが扱われ」ると述べたのですが，ここで「基本的な命題」とは何かということが問題になります。この点を明確にするために，「言語」の概念を説明したいと思います。

---

[*] 変数の動く範囲を添えて $(\forall x \in \mathbb{R})(x > 0 \vee -x > 0)$ とか $\neg((\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = -1))$ と書く場合もあるのですが，これは記号論理学の記法というより数学で慣用される略記法です。この授業では記号論理学に従い，そのような書き方は避けることにします。