

## 9 パラメトリクスの構成 (1)

閉 Riemann 多様体における  $\Delta$  のパラメトリクスを構成する (正確には左パラメトリクス).  
これが定理 3.3 の証明の核である.

### ❖ 有界作用素のパラメトリクス

有界作用素のパラメトリクスとは, コンパクト作用素を法とする逆作用素のことである (もう少し強いことを要請する場合もあるが, われわれはこの言葉遣いを採用する).

**定義.** Hilbert 空間のあいだの有界作用素  $P: V_1 \rightarrow V_2$  に対し, 有界作用素  $Q: V_2 \rightarrow V_1$  が  $P$  の左パラメトリクスであるとは,

$$QP = I - K$$

とおくと  $K$  がコンパクト作用素  $K$  であることをいう.

**命題 9.1.** Hilbert 空間のあいだの有界作用素  $P: V_1 \rightarrow V_2$  が左パラメトリクスをもてば,  $\ker P$  は有限次元である.

[証明]  $Q$  を  $P$  の左パラメトリクスとすれば,  $QP = I - K$  の核は定理 7.6 (1) により有限次元であって,  $\ker P \subset \ker(QP)$  なので  $\ker P$  も有限次元である.  $\square$

注 9.2. 右パラメトリクスの定義も明らかであろう.  $P$  が左パラメトリクスと右パラメトリクスを両方とももつことは,  $P$  が Fredholm 作用素であるための必要十分条件である. いい参考文献がどれなのかよくわからないが, L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, III: Pseudo-Differential Operators*, Corrected Second Printing, Springer, 1994 の Corollary 19.1.9 を紹介しておく.

われわれは 2 種類のコンパクト作用素を知っている. ひとつは有限階作用素である (例 7.4 (1) で述べた). もうひとつは Rellich の定理 (定理 7.5) によるものである. すなわち, 閉多様体  $M$  において,  $m > l$  とすれば埋め込み写像  $W^m(M) \hookrightarrow W^l(M)$  はコンパクト作用素であった. さらに次が成り立つ.

**補題 9.3.** (1) コンパクト作用素の和, スカラー倍はコンパクト作用素である.

(2) コンパクト作用素と有界作用素の合成はコンパクト作用素である.

[証明] (1) はほとんど明らかであろう (問題 9.1).

(2) コンパクト作用素  $K: V_1 \rightarrow V_2$  と有界作用素  $T: V_2 \rightarrow V_3$  の合成  $TK$  を考える.  $\{u_j\}$  を  $V$  の有界点列とすると,  $\{Ku_j\}$  は収束部分列  $\{Ku_{j_k}\}$  をもつ. このとき  $\{TKu_{j_k}\}$  も収束する. これが  $\{TKu_j\}$  の収束部分列になっているので,  $TK$  はコンパクト作用素. 有界作用素  $T: V_1 \rightarrow V_2$  とコンパクト作用素  $K: V_2 \rightarrow V_3$  の合成  $KT$  についても同様.  $\square$

❖ トーラスにおけるパラメトリクスとしての Green 作用素

トーラス  $T^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$  において,  $\ker \tilde{\Delta}$  の元はすべて  $C^\infty$  級であり, したがって  $\ker \tilde{\Delta}$  は  $\mathcal{H}^k$  と等しかった. 具体的には

$$\ker \tilde{\Delta} = \mathcal{H}^k = \left\{ \omega = \sum_I \omega_I dx^I \mid \text{各 } \omega_I \text{ は定数} \right\}$$

である (命題 8.5). この具体形から,  $\mathcal{H}^k$  は  $L^2_{(k)}(T^n)$  の閉部分空間でもある. 直交補空間  $(\mathcal{H}^k)^\perp$  は  $\text{im } \tilde{\Delta}$  に等しい (命題 8.6).

本項ではずっとトーラスについて述べるので, 以下  $L^2_{(k)}(T^n)$  や  $W^m_{(k)}(T^n)$  の  $(T^n)$  を省略する.

直交直和分解  $L^2_{(k)} = \mathcal{H}^k \oplus (\mathcal{H}^k)^\perp$  に関する  $\omega$  の分解を  $\omega = \omega_H + \omega_\perp$  と書くことにする. **調和射影**  $H: L^2_{(k)} \rightarrow L^2_{(k)}$  を  $H\omega = \omega_H$  で定義する.  $H$  は有限階作用素なのでコンパクト作用素である. より一般に,  $H_m: W^m_{(k)} \rightarrow W^m_{(k)}$  を同じ式  $H_m\omega = \omega_H$  で定義しておく.

32 ページで述べたように,  $\tilde{\Delta}$  は

$$\tilde{\Delta}: W^2_{(k)} \cap (\mathcal{H}^k)^\perp \rightarrow (\mathcal{H}^k)^\perp$$

という全単射有界作用素を定めるので, その逆写像として  $G: (\mathcal{H}^k)^\perp \rightarrow W^2_{(k)} \cap (\mathcal{H}^k)^\perp$  という有界作用素が得られる (開写像原理による). これを  $G|_{\mathcal{H}^k} = 0$  と定めることで拡張して, Green 作用素とよばれる有界作用素

$$G: L^2_{(k)} \rightarrow W^2_{(k)}$$

を得る.

**命題 9.4.**  $G(W^m_{(k)}) \subset W^{m+2}_{(k)}$  である.  $G_m: W^m_{(k)} \rightarrow W^{m+2}_{(k)}$  を  $G_m\omega = G\omega$  によって定めれば, これも有界作用素.

[証明]  $\eta \in W^m_{(k)}$  に対し  $\omega = G\eta$  とおけば,  $\omega$  は  $\tilde{\Delta}\omega = \eta_\perp$  をみたす唯一の  $\omega \in W^2_{(k)} \cap (\mathcal{H}^k)^\perp$  である. ここで  $\eta_\perp \in W^m_{(k)}$  なので, 命題 8.7 より  $\omega \in W^{m+2}_{(k)}$ . これで前半の主張が示された.

後半については, まず, もともと  $\text{im } G \subset (\mathcal{H}^k)^\perp$  だから  $\text{im } G_m \subset (\mathcal{H}^k)^\perp$  であることに注意する.  $G_m$  を制限して  $W^m_{(k)} \cap (\mathcal{H}^k)^\perp \rightarrow W^{m+2}_{(k)} \cap (\mathcal{H}^k)^\perp$  という写像を考える. するとこれは ( $G$  の定義を振り返れば)  $\tilde{\Delta}: W^{m+2}_{(k)} \cap (\mathcal{H}^k)^\perp \rightarrow W^m_{(k)} \cap (\mathcal{H}^k)^\perp$  という全単射有界作用素の逆写像なので有界作用素.  $\square$

**命題 9.5.**  $\tilde{\Delta}: W^{m+2}_{(k)} \rightarrow W^m_{(k)}$  に対し,  $G_m\tilde{\Delta} = I - H_{m+2}$  である.

[証明]  $G_m\tilde{\Delta}\omega = G_m(\tilde{\Delta}\omega - \tilde{\Delta}\omega_H) = G_m\tilde{\Delta}(\omega - \omega_H) = G_m\tilde{\Delta}\omega_\perp = \omega_\perp = (I - H_{m+2})\omega$ .  $\square$

よって  $G_m$  は  $\tilde{\Delta}: W^{m+2}_{(k)} \rightarrow W^m_{(k)}$  の左パラメトリクスである.

注 9.6. なお,  $\tilde{\Delta}G_m = I - H_m$  であることも容易に確かめられる.

❖ 閉多様体における  $\tilde{\Delta}$  のパラメトリクスの構成

いよいよ閉 Riemann 多様体  $(M, g)$  における  $\tilde{\Delta}$  の左パラメトリクスの構成に入るが、これをさらに精密に、次のような形で行う。ここからは  $L^2_{(k)}(M)$  や  $W^m_{(k)}(M)$  の  $(M)$  を省略する。

**定理 9.7.**  $(M, g)$  を閉 Riemann 多様体とする。そのとき次のような有界作用素

$$S: L^2_{(k)}(M) \rightarrow W^2_{(k)}(M)$$

が存在する。

- (i)  $S(W^m_{(k)}) \subset W^{m+2}_{(k)}$  である。そこで  $S_m: W^m_{(k)} \rightarrow W^{m+2}_{(k)}$  を  $S_m\omega = S\omega$  によって定めれば、 $S_m$  も有界作用素。
- (ii)  $\tilde{\Delta}: W^2_{(k)} \rightarrow L^2_{(k)}$  に対して  $S\tilde{\Delta} = I - K$  とおくと、 $K(W^{m+2}_{(k)}) \subset W^{m+3}_{(k)}$  である。そこで  $K_{m+2}: W^{m+2}_{(k)} \rightarrow W^{m+3}_{(k)}$  を  $K_{m+2}\omega = K\omega$  によって定めれば、 $K_{m+2}$  も有界作用素。

したがって  $S_m\tilde{\Delta} = I - K_{m+2}$  でもあって、 $K_{m+2}$  を  $W^{m+2}_{(k)} \rightarrow W^{m+2}_{(k)}$  という作用素とみればコンパクト作用素である（定理 7.5 と補題 9.3 による）。つまり  $S_m$  は  $\tilde{\Delta}: W^{m+2}_{(k)} \rightarrow W^m_{(k)}$  の左パラメトリクス。

注 9.8. トーラス  $T^n$  においては Green 作用素が定理 9.7 の  $S$  にあたる。 $G$  が条件 (i) をみたすことは命題 9.5 で述べた。このとき  $K$  とは調和射影  $H$  である。 $H(W^{m+2}_{(k)}) \subset W^{m+3}_{(k)}$  は  $\text{im } H = \mathcal{H}^k \subset \Omega^k$  だからよい。 $H_{m+2}$  を  $W^{m+2}_{(k)} \rightarrow W^{m+3}_{(k)}$  という作用素とみても有界作用素であることは次のようにみればよい。 $\omega \in W^{m+2}_{(k)}$  について  $\omega = \omega_H + \omega_\perp$  と書けば  $H_{m+2}\omega = \omega_H$  なのだが、ここで

$$\|\omega_H\| \leq \|\omega\| \leq \|\omega\|_{m+2}$$

である（一つ目の不等式は  $\omega_H \perp \omega_\perp$  より  $\|\omega\|^2 = \|\omega_H\|^2 + \|\omega_\perp\|^2$  だから）。あとは  $\|\omega_H\|_{m+3} \leq C\|\omega_H\|$  をみたす  $\omega$  によらない定数  $C > 0$  があればよい。そのような  $C$  が存在することは、一般に有限次元ベクトル空間  $V$  に定義されるノルムはいずれも同値であることからわかる。

次に、定理 9.7 の  $S$  を構成する問題は、閉多様体では局所的に解決できれば十分であることを確かめることにしよう。

開集合  $U \subset M$  に対して、 $W^m_{(k)}(M)$  における  $\Omega^k_c(U)$  の閉包を  $W^m_{0,(k)}(U)$  で表す（これは  $W^m_{(k)}(M)$  の閉部分空間なので、 $W^m_{0,(k)}(U)$  も内積  $(\cdot, \cdot)_m$  に関して Hilbert 空間である）。 $L^2_{(k)}(M)$  における  $\Omega^k_c(U)$  の閉包は  $L^2_{(k)}(U)$  である（本質的に命題 5.1）。

$\psi \in C^\infty_c(U)$  のとき、任意の  $\omega \in W^m_{(k)}(M)$  に対し  $\psi\omega \in W^m_{0,(k)}(U)$  が成り立つ。そのことを示すには  $W^m_{(k)}(M)$  において  $\Omega^k(M)$  が稠密であることをいえばよく、詳細は省くが、これも命題 5.1 などのように、Friedrichs の軟化子を用いた議論によってわかる。

**補題 9.9.** 閉 Riemann 多様体  $(M, g)$  の有限開被覆  $\{U_i\}$  が与えられているとする。各々の  $U_i$  において、有界作用素  $S_i: L^2_{(k)}(U_i) \rightarrow W^2_{0,(k)}(U_i)$  であって、定理 9.7 と同様に以下の 2 条件をみたすようなものが存在するならば、定理 9.7 の  $S$  も存在する。

- (i)  $S_i(W_{0,(k)}^m(U_i)) \subset W_{0,(k)}^{m+2}(U_i)$  である. そこで  $S_{i,m}: W_{0,(k)}^m(U_i) \rightarrow W_{0,(k)}^{m+2}(U_i)$  を  $S_{i,m}\omega = S_i\omega$  によって定めれば,  $S_{i,m}$  も有界作用素.
- (ii)  $\tilde{\Delta}: W_{0,(k)}^2(U_i) \rightarrow L_{(k)}^2(U_i)$  に対して  $S_i\tilde{\Delta} = I - K_i$  とおくと,  $K_i(W_{0,(k)}^{m+2}(U_i)) \subset W_{0,(k)}^{m+3}(U_i)$  である. そこで  $K_{i,m+2}: W_{0,(k)}^{m+2}(U_i) \rightarrow W_{0,(k)}^{m+3}(U_i)$  を  $K_{i,m+2}\omega = K_i\omega$  によって定めれば,  $K_{i,m+2}$  も有界作用素.

[証明]  $\omega \in L_{(k)}^2(M)$  に対し

$$S\omega = \sum_i S_i(\psi_i\omega)$$

と定義する. すると,  $\omega \in W_{(k)}^2(M)$  に対し,  $\omega$  の高々 1 階微分で表せる項を「低階項」と書くことにすれば

$$\begin{aligned} S\tilde{\Delta}\omega &= \sum_i S_i(\psi_i\tilde{\Delta}\omega) \\ &= \sum_i S_i\tilde{\Delta}(\psi_i\omega) + \sum_i S_i(\text{低階項}) = \sum_i (I - K_i)(\psi_i\omega) + \sum_i S_i(\text{低階項}) \\ &= \omega - \sum_i K_i(\psi_i\omega) + \sum_i S_i(\text{低階項}) \end{aligned}$$

となるので,  $S$  が求めるものになっている (詳しくは問題 9.2). □

補題 9.9 からとくに, われわれは  $M$  のチャート上で  $S$  を構成すればいいことになる. もっといえば,  $M$  のチャート  $(U, \varphi)$  であって,  $\bar{U}$  を含むさらに大きなチャート  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  の制限になっているようなものについて,  $S$  を構成すれば十分である.

## 問題

問題 9.1.  $K_1, K_2, K$  が Hilbert 空間のあいだのコンパクト作用素であるとき,  $K_1 + K_2$  および  $cK$  もコンパクト作用素であることを示せ.

問題 9.2. 補題 9.9 の証明において,  $S$  が定理 9.7 の条件 (i), (ii) をみたしていることを確かめよ.