

8 トーラスの場合

はじめに新しい記号法を導入しておく. L^2 微分を通常の微分と明確に区別するため, 微分作用素の記号にチルダをつけて表すことにしよう. つまり, $f \in L^2(U)$ の L^2 偏導関数を $\tilde{\delta}_{x^i} f$ と書く.

d, δ, Δ についても同じである. たとえば, 局所座標表示を用いた d の公式を $W_{(k)}^1(M)$ の元 ω に流用して定義した $d\omega$ は $\tilde{d}\omega$ で表す. 27 ページの考察によると, $W_{(k)}^1(M) \subset \text{dom}(d^*)$ であり, かつ $W_{(k)}^1(M)$ 上では $d^* = \tilde{\delta}$ だが, $\text{dom}(d^*) = W_{(k)}^1(M)$ かどうかは判明していない. 同様に, $W_{(k)}^2(M) \subset \text{dom}(\Delta^*)$ であり, かつ $W_{(k)}^2(M)$ 上では $\Delta^* = \tilde{\Delta}$ だが, $\text{dom}(\Delta^*) = W_{(k)}^2(M)$ かどうか私たちはまだ知らない (だが命題 8.4 で $M = T^n$ についてはそれが真であることが示される).

❖ トーラス上の L^2 空間と Fourier 展開

トーラス $T^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$ を考える (例 1.4 と同様だが, $\mathbb{Z}^n$ を $(2\pi\mathbb{Z})^n$ に変更した).

T^n 上の関数や微分形式があると, それを射影 $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ で引き戻すことにより, $\mathbb{R}^n$ 上の関数や微分形式であって, $(2\pi\mathbb{Z})^n$ を周期とするものが得られる*. この対応により, T^n 上の関数や微分形式を $(2\pi\mathbb{Z})^n$ を周期とする $\mathbb{R}^n$ 上の関数や微分形式と同一視する.

T^n 上の関数を $\mathbb{R}^n$ 上の周期関数とみると, T^n 上の積分は $[0, 2\pi]^n$ 上の積分として計算できる. したがって L^2 条件も $[0, 2\pi]^n$ 上の積分を用いて表現される. これから Fourier 展開の話をする都合で複素数値関数を考えることにすると, T^n 上の複素数値 L^2 関数の空間 $L_{\mathbb{C}}^2(T^n)$ は

$$L_{\text{per}, \mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は可測関数で } \int_{[0, 2\pi]^n} |f|^2 dx < +\infty \right\}$$

と同一視されることになる (dx は $dx^1 dx^2 \cdots dx^n$ の略記).

$f \in L_{\mathbb{C}}^2(T^n) = L_{\text{per}, \mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^n)$ の **Fourier 展開**とは

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} a_{\xi} e^{i\langle \xi, x \rangle} \quad (\text{右辺は } L^2 \text{ 収束}) \quad (8.1)$$

という表示のことである. ここで $\langle \xi, x \rangle = \xi^1 x^1 + \xi^2 x^2 + \cdots + \xi^n x^n$ と書いた.

命題 8.1. 任意の $f \in L_{\mathbb{C}}^2(T^n)$ に対し, $a_{\xi} = a_{\xi}(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} f(x) e^{-i\langle \xi, x \rangle}$ とおけば (8.1) が成立する. この対応によって

$$L_{\mathbb{C}}^2(T^n) \cong l_{\mathbb{C}}^2 := \left\{ \{a_{\xi}\}_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \mid \sum_{\xi} |a_{\xi}|^2 < +\infty \right\}$$

という線形同型写像が得られる. さらに $\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} |f|^2 dx = \sum_{\xi} |a_{\xi}|^2$ が成立する.

* 「任意の $a \in (2\pi\mathbb{Z})^n$ について, τ_a による引き戻しで不変である」ということを「 $(2\pi\mathbb{Z})^n$ を周期とする」と言い表すことにする.

微分形式を扱う場合も新しいことは必要ない． $\mathbb{R}^n$ の微分形式を $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$ と書いたとき， $\tau_a^* \omega = \omega$ という条件は「各係数 ω_I が $\omega_I \circ \tau_a = \omega_I$ をみたす」ということと同じである．したがって T^n 上の複素数値 L^2 微分形式 ω とは， $\mathbb{R}^n$ でみれば，各係数 ω_I が $L^2_{\text{per}, \mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ に属するような微分形式に外ならない．

❖ トーラス上の Sobolev 空間と Δ^* の作用

T^n 上における L^2 偏微分を Fourier 展開を通じて理解したい．Fourier 展開の式 (8.1) を形式的に偏微分してみよう．すると任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し

$$\tilde{\partial}^\alpha f = \sum_{\xi} i^{|\alpha|} \xi^\alpha a_\xi e^{i\langle \xi, x \rangle} \quad (8.2)$$

という等式の成立が期待される（ここで $\tilde{\partial}^\alpha = \tilde{\partial}_{x^1}^{\alpha_1} \tilde{\partial}_{x^2}^{\alpha_2} \cdots \tilde{\partial}_{x^n}^{\alpha_n}$ ，また $\xi^\alpha = (\xi^1)^{\alpha_1} (\xi^2)^{\alpha_2} \cdots (\xi^n)^{\alpha_n}$ とした）．実際よく考えてみると， $f \in L^2_{\mathbb{C}}(T^n)$ に対し， $\tilde{\partial}_{x^i} f \in L^2_{\mathbb{C}}(T^n)$ が定義されたならば

$$a_\xi(\tilde{\partial}_{x^i} f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} (\tilde{\partial}_{x^i} f) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f \partial_{x^i} (e^{-i\langle \xi, x \rangle}) dx = i \xi^i a_\xi(f) \quad (8.3)$$

が成立するのである（ただし注 8.2 もみよ）．これを繰り返すことで，仮に $\tilde{\partial}^\alpha f \in L^2_{\mathbb{C}}(T^n)$ が定義されるならば，(8.2) が成立することがわかる．

注 8.2. (8.3) の計算を正確に解釈するには注意がいる．そもそも $\tilde{\partial}_{x^i} f$ の定義を明確にしていなかったのので，そこから述べる．26 ページで説明しているようなアトラス $\{U_\lambda\}$ と 1 の分割 $\{\psi_\lambda\}$ をとる．ただし各 U_λ は，射影 $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ を $\mathbb{R}^n$ のある開集合 V_λ に制限することで微分同相 $\pi|_{V_\lambda}: V_\lambda \rightarrow U_\lambda$ が得られるようなものにしておき， U_λ には $\pi|_{V_\lambda}$ の逆写像を用いて座標系 $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ を与えておく．「 $\tilde{\partial}_{x^i} f$ が定義される」というのは「各チャート U_λ において $\tilde{\partial}_{x^i}(\psi_\lambda f)$ が定義される」という意味であるとし，そのとき $\tilde{\partial}_{x^i} f = \sum \tilde{\partial}_{x^i}(\psi_\lambda f)$ と定めよう．すると， $\text{supp } \tilde{\partial}_{x^i}(\psi_\lambda f) \subset \text{supp } \psi_\lambda$ なので， $\chi_\lambda \in C_c^\infty(U_\lambda)$ を $\text{supp } \psi_\lambda$ 上では $\chi_\lambda = 1$ となるようにとっておけば

$$\int_{T^n} (\tilde{\partial}_{x^i} f) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx = \sum_{\lambda} \int_{V_\lambda} (\tilde{\partial}_{x^i}(\psi_\lambda f)) \chi_\lambda e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx = - \sum_{\lambda} \int_{V_\lambda} (\psi_\lambda f) \partial_{x^i} (\chi_\lambda e^{-i\langle \xi, x \rangle}) dx = - \int_{T^n} f \partial_{x^i} (e^{-i\langle \xi, x \rangle}) dx$$

のように計算できる．

もう少し細々とした議論を経て次の結論が得られる．

命題 8.3. $f \in L^2_{\mathbb{C}}(T^n)$ が $W^m_{\mathbb{C}}(T^n)$ に属するためには， $|\alpha| \leq m$ をみたす任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して $\{\xi^\alpha a_\xi(f)\}_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \in l^2_{\mathbb{C}}$ が成り立つことが必要十分である．別の言い方をすれば

$$\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^m |a_\xi(f)|^2 < +\infty$$

が必要十分である（問題 8.1）．また $f \in W^m_{\mathbb{C}}(T^n)$ のとき， $|\alpha| \leq m$ に対し (8.2) が成立する．

* $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ をみたす組 $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ を I のような文字で表して， $\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ をこのように略記することにしよう．

T^n 上のラプラシアン の作用を Fourier 展開を用いて表しておく.

まず, $f \in C^\infty(T^n)$ に対しては $\Delta f = -\sum_i \partial_{x^i}^2 f$ である. $f \in W_{(k)}^2(T^n)$ に対しては, $\tilde{\partial}_{x^i} \tilde{\partial}_{x^j} f$ の Fourier 係数は $a_\xi(\tilde{\partial}_{x^i} \tilde{\partial}_{x^j} f) = -\xi_i \xi_j a_\xi(f)$ で与えられるから, $a_\xi(\tilde{\Delta} f) = |\xi|^2 a_\xi(f)$ となる.

$\omega = \sum \omega_I dx^I \in \Omega^k(T^n)$ については $\Delta \omega = \sum (\Delta \omega_I) dx^I$ である. ゆえに $\omega \in W_{(k)}^2(T^n)$ に対し

$$a_\xi((\tilde{\Delta} \omega)_I) = |\xi|^2 a_\xi(\omega_I) \quad (8.4)$$

が成立する.

命題 8.4. T^n 上の微分 k 形式に作用する Δ について $\text{dom}(\Delta^*) = W_{(k)}^2(T^n)$ である. したがってまた $\Delta^* = \tilde{\Delta}$.

[証明] $k = 0$ のときは, $f \in \text{dom}(\Delta^*)$ とすれば, もちろん $\Delta^* f \in L^2(T^n)$ であって

$$a_\xi(\Delta^* f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} (\Delta^* f) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f \Delta(e^{-i\langle \xi, x \rangle}) dx = |\xi|^2 a_\xi(f)$$

を得る. したがって $\{|\xi|^2 a_\xi(f)\} \in l_{\mathbb{C}}^2$ でなければならない. 同時に $\{a_\xi(f)\} \in l_{\mathbb{C}}^2$ でもあるから,

$$\sum_{\lambda} (1 + |\xi|^2)^2 |a_\xi(f)|^2 \leq \sum_{\lambda} 2(1 + |\xi|^4) |a_\xi(f)|^2 < +\infty.$$

ゆえに $f \in W^2(T^n)$. 一般の k については, $\omega \in \text{dom}(\Delta^*)$ ならば各係数 ω_I が $\text{dom}(\Delta^*)$ に属することがわかるので, $\omega_I \in W^2(T^n)$ であり, したがって $\omega \in W_{(k)}^2(T^n)$ である. $\square$

❖ Hodge–de Rham–小平分解

$\ker \tilde{\Delta}$ と $\text{im } \tilde{\Delta}$ を具体的に記述しよう. あわせて正則性定理 (の精密なバージョン) も述べる.

命題 8.5. T^n 上の微分 k 形式に作用する $\tilde{\Delta}$ について, $\ker \tilde{\Delta}$ は各係数 ω_I が定数であるような微分形式 $\omega = \sum \omega_I dx^I$ のみからなる. (とくに $\ker \tilde{\Delta}$ の元はすべて C^∞ 級である.)

[証明] $\omega \in \ker \tilde{\Delta}$ ならば, (8.4) により $a_\xi(\omega_I)$ は $\xi = 0$ の場合を除き 0 でなければならない. $\square$

命題 8.6. $\eta \in L_{(k)}^2(T^n)$ が $\text{im } \tilde{\Delta}$ に属するためには, 各 I について $a_0(\eta_I) = 0$ であることが必要十分である. とくに $\text{im } \tilde{\Delta}$ は $L_{(k)}^2(T^n)$ の閉部分空間である.

[証明] $\eta \in \text{im } \tilde{\Delta}$ ならば, (8.4) により $a_0(\eta_I) = 0$ でなければならない. 逆に $\eta \in L_{(k)}^2(T^n)$ が任意の I について $a_0(\eta_I) = 0$ をみたすとき, $b_{I,\xi} = |\xi|^{-2} a_\xi(\eta_I)$ とおくと, $\{b_{I,\xi}\}$ も $L^2(T^n)$ の元を定める. それを f_I とおき $\omega = \sum f_I dx^I$ とおけば, (8.4) によって $\tilde{\Delta} \omega = \eta$ である. $\square$

命題 8.7. T^n 上の微分 k 形式 $\omega \in \text{dom}(\tilde{\Delta})$ に対し, $\tilde{\Delta} \omega \in W_{(k)}^m(T^n)$ ならば $\omega \in W_{(k)}^{m+2}(T^n)$. (したがってまた, 系 7.3 (2) により, $\tilde{\Delta} \omega$ が C^∞ 級ならば ω も C^∞ 級である.)

[証明] (8.4) を使う. 問題 8.2 としておく. $\square$

これで以下の結論が得られる.

定理 8.8 (トーラスにおける Hodge-de Rham-小平分解). $L^2_{(k)}(T^n) = \mathcal{H}^k \oplus \text{im } \tilde{\Delta}$ が成立する. また, この分解を $\Omega^k(T^n)$ の元に適用すれば $\Omega^k(T^n) = \mathcal{H}^k \oplus \text{im } \Delta$ である.

[証明] 前半は命題 8.5 と命題 8.6 による. 後半は命題 8.7 からわかる. $\square$

以下では $(\mathcal{H}^k)^\perp$ という記号で $L^2_{(k)}(T^n)$ における $\mathcal{H}^k$ の直交補空間を表す. $(\mathcal{H}^k)^\perp$ は $L^2_{(k)}(T^n)$ の閉部分空間だが, これについて次も成り立つことを確認しておく.

補題 8.9. $W^m_{(k)}(T^n) \cap (\mathcal{H}^k)^\perp$ は Sobolev ノルムに関して $W^m_{(k)}(T^n)$ の閉部分空間である.

[証明] ω_j が $W^m_{(k)}(T^n) \cap (\mathcal{H}^k)^\perp$ の元の列で, Sobolev ノルム $\|\cdot\|_m$ に関して $\omega \in W^m_{(k)}(T^n)$ に収束しているとする. そのとき L^2 ノルムに関して $\omega_j \rightarrow \omega$ であるから $\omega \in (\mathcal{H}^k)^\perp$ がわかる. $\square$

❖ Green 作用素

任意の $\eta \in \text{im } \tilde{\Delta}$ に対し, 微分方程式 $\tilde{\Delta}\omega = \eta$ をみたす ω は $\text{mod } \mathcal{H}^k$ で一意的に定まる. したがって, $(\mathcal{H}^k)^\perp$ という空間に解を定めることにすれば, 解 ω は一意的である. 命題 8.6 または定理 8.8 によると $\text{im } \tilde{\Delta} = (\mathcal{H}^k)^\perp$ であるから, $\tilde{\Delta}$ は全単射有界作用素

$$\tilde{\Delta}: W^2_{(k)}(T^n) \cap (\mathcal{H}^k)^\perp \rightarrow (\mathcal{H}^k)^\perp$$

を与える. したがってその逆写像 $G: (\mathcal{H}^k)^\perp \rightarrow W^2_{(k)}(T^n) \cap (\mathcal{H}^k)^\perp$ は開写像原理によって有界作用素となる*. あるいは, それを自然に (つまり G は $\mathcal{H}^k$ 上では自明として)

$$G: L^2_{(k)}(T^n) \rightarrow W^2_{(k)}(T^n) \tag{8.5}$$

という有界作用素に拡張する. (8.5) を $\tilde{\Delta}$ に対する **Green 作用素**とよぶ†.

問題

問題 8.1. $\{a_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \in l^2_{\mathbb{C}}$ とする. $|\alpha| \leq m$ をみたすすべての $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して $\{\xi^\alpha a_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \in l^2_{\mathbb{C}}$ であることは, $\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^m |a_\xi|^2 < +\infty$ と同値であることを示せ.

問題 8.2. 命題 8.7 を証明せよ.

*開写像原理については, 黒田成俊『関数解析』(共立出版, 1980 年)の定理 7.30 をみよ.

†ちなみに英語では the Green's operator である. 文法的におかしいが, この表現が定着している.