

7 Sobolev 空間

Δ^* に対するパラメトリクスの構成に向けて、微分形式のなす関数空間として L^2 空間でなく Sobolev 空間を採用することにより、 d^* , δ^* , Δ^* を有界作用素とみなす見方を導入したい。

❖ L^2 の意味での微分

まず開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ における関数の“一般化された微分”を考える。

定義. $f \in L^2(U)$ が x^i 方向 ($1 \leq i \leq n$) に L^2 の意味で偏微分可能 (L^2 偏微分可能) であるとは、ある $g \in L^2(U)$ が存在して、任意の関数 $\phi \in C_c^\infty(U)$ に対し

$$\int_U f \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^1 dx^2 \cdots dx^n = - \int_U g \phi dx^1 dx^2 \cdots dx^n \quad (7.1)$$

がみたされることをいう*。そのような g は存在すれば一意である。 g のことを f の x^i 方向の L^2 偏導関数といい、 $\partial f / \partial x^i$ や $\partial_{x^i} f$ で表す。

(7.1) に現れる ϕ は、**テスト関数**とよばれることが多い。

高階偏導関数も同様にして定義される。たとえば、 f の L^2 偏導関数 $\partial_{x^i} f$ が存在し、またそれが x^j 方向の L^2 偏導関数 $\partial_{x^j}(\partial_{x^i} f)$ をもつとき、 $\partial_{x^j}(\partial_{x^i} f)$ のことを $\partial_{x^j} \partial_{x^i} f$ で表す。 $\partial_{x^i} \partial_{x^j} f$ と $\partial_{x^j} \partial_{x^i} f$ が両方とも存在するとき、それらは等しい (問題 7.1)。

❖ 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ における Sobolev 空間

$f \in L^2(U)$ であって 1, 2, …, m 階の L^2 偏導関数が全部存在するようなすべての f からなる $L^2(U)$ の部分空間を $W^m(U)$ で表し[†], **Sobolev 空間**という。 $W^0(U)$ は $L^2(U)$ のことだと定める。

$m \geq 1$ に対し、 $W^m(U)$ は $L^2(U)$ の閉部分空間ではない[‡]。したがって L^2 内積を $W^m(U)$ に制限しても $W^m(U)$ は Hilbert 空間でないが、

$$\|f\|_m^2 = \sum_{l=0}^m \|\nabla^l f\|^2, \quad \|\nabla^l f\|^2 = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_l=1}^n \|\partial_{x^{i_1}} \partial_{x^{i_2}} \cdots \partial_{x^{i_l}} f\|^2$$

で定義される **Sobolev ノルム** $\|\cdot\|_m$ を考えれば、対応する内積 $(\cdot, \cdot)_m$ について $W^m(U)$ は Hilbert 空間となる (問題 7.2)。

*Schwarz 超関数 (distribution) の概念を知っていれば次のようにもいえる—— L^2 偏微分可能性とは、「Schwarz 超関数の意味での f の偏導関数が、 L^2 関数によって与えられる」ということである。

[†] L^2 空間を用いて定義していることを強調して $W^{m,2}$ とも書く。 L^2 のかわりに L^p を用いて定義した Sobolev 空間は $W^{m,p}$ である。

[‡] $C_c^\infty(U) \subset W^m(U)$ より $W^m(U)$ は $L^2(U)$ において稠密であり、ゆえに仮に $W^m(U)$ が閉部分空間なら $W^m(U) = L^2(U)$ ということになるが、実際にはそうではないから、 $W^m(U) \neq L^2(U)$ についてはたとえば問題 7.3 を考えよ。

注 7.1. ここでいう「対応する内積 $(\cdot, \cdot)_m$ 」とは

$$(f, g)_m = \sum_{l=0}^m (\nabla^l f, \nabla^l g), \quad (\nabla^l f, \nabla^l g) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_l=1}^n (\partial_{x^{i_1}} \partial_{x^{i_2}} \cdots \partial_{x^{i_l}} f, \partial_{x^{i_1}} \partial_{x^{i_2}} \cdots \partial_{x^{i_l}} g)$$

のことである。より一般に、ベクトル空間のノルム $\|\cdot\|$ が与えられたとき、 $\|\cdot\|$ を定めるような内積 $(\cdot, \cdot)$ がもし存在すれば、それは $(u, v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$ というものでしかあり得ない。内積はノルムから決まるのである。そのため、本文のように具体的に $(\cdot, \cdot)_m$ を定めずに「対応する内積 $(\cdot, \cdot)_m$ 」としか述べなくても、 $(\cdot, \cdot)_m$ は上記のもの以外に可能性はなく、論理的には曖昧さは残らない。

❖ 閉多様体の Sobolev 空間

(M, g) を閉多様体とする。アトラス $\mathcal{S} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ として次のようなものを用意する。

- (i) 添字集合 Λ は有限集合。
- (ii) $\mathcal{S}$ の各チャート $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ は、閉包 $\bar{U}_\lambda$ を含むような M のチャート $(\tilde{U}_\lambda, \tilde{\varphi}_\lambda)$ を U_λ に制限することで得られる。ここで $(\tilde{U}_\lambda, \tilde{\varphi}_\lambda)$ が $\mathcal{S}$ のメンバーである必要はない。

さらに 1 の分割 $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を一つとる。 M 上の関数 f に対し、 $\psi_\lambda f$ は、 $V_\lambda = \varphi_\lambda(U_\lambda)$ で定義された (コンパクト台をもつ) 関数ともみなせる。以上の状況設定のもとで次のように定義する。

定義. 閉多様体 M 上の Sobolev 空間 $W^m(M)$ および Sobolev ノルムを次で定める。

$$W^m(M) = \{f \in L^2(M) \mid \mathcal{S} \text{ の各チャートにおいて } \psi_\lambda f \in W^m(V_\lambda)\},$$

$$\|f\|_m^2 = \sum_{\lambda} \|\psi_\lambda f\|_m^2.$$

(対応する内積 $(\cdot, \cdot)_m$ も定義される.)

Sobolev 空間 $W^m(M)$ はアトラス $\mathcal{S}$ や 1 の分割 $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の選び方によらないし、Riemann 計量 g も定義には用いなかった*。Sobolev ノルム $\|\cdot\|_m$ はもちろん $\mathcal{S}$ や $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に依存するが、異なる $\mathcal{S}$ や $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を採用しても、そうして得られる Sobolev ノルムは元のものと同値である。

微分形式のなす Sobolev 空間 $W_{(k)}^m(M)$ の定義も同様にできる。

定義. 閉多様体 M 上の微分形式 ω に対し、 U_λ における局所座標表示を $\omega = \sum \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ としておく。各 $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$ に ψ_λ を掛けたものを V_λ で定義された関数とみなし、

$$W_{(k)}^m(M) = \{\omega \in L_{(k)}^2(M) \mid \mathcal{S} \text{ の各チャートですべての } \psi_\lambda \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \text{ が } W^m(V_\lambda) \text{ に属する}\},$$

$$\|\omega\|_m^2 = \sum_{\lambda} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \|\psi_\lambda \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}\|_m^2$$

*Riemann 計量 g が与えられていれば、 $\|\cdot\|_m$ をそれに応じた自然な形で定義し直すこともできる。Levi-Civita 接続を用いて $\nabla^l f$ をつくり、 $\|f\|_m^2 = \sum_{l=0}^m \|\nabla^l f\|^2$ とすればよい。とくに非コンパクト多様体では一般にこのように定める。

と定める.

d の共役作用素 d^* は, $L^2_{(k)}(M)$ から $L^2_{(k-1)}(M)$ への作用素として次で与えられた.

$$\text{dom}(d^*) = \{\omega \in L^2_{(k)}(M) \mid \exists \eta \in L^2_{(k-1)}(M) \text{ s.t. } \forall \alpha \in \Omega^k(M) \text{ に対し } (\omega, d\alpha) = (\eta, \alpha)\}, \quad (7.2)$$

$$\omega \in \text{dom}(d^*) \text{ に対して } d^*\omega = (\text{上記 (7.2) の } \eta).$$

$\omega \in W^1_{(k)}(M)$ のとき, 実は $\omega \in \text{dom}(d^*)$ であることがわかる. というのは, まず $\omega \in \Omega^k(M)$ に対し $\delta\omega$ の局所座標表示を与える公式を, $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$ の 1 階以下の偏導関数を用いて書き下すことができる. $\omega \in W^1_{(k)}(M)$ に対しても同じ公式を流用し, ただし偏導関数を L^2 偏導関数に置き換えることにより $\delta\omega$ を定義すると, その $\delta\omega$ が (7.2) に現れる条件の η になる. こうして $d^*: W^1_{(k)}(M) \rightarrow L^2_{(k-1)}(M)$ という有界作用素が得られる. より一般に, まったく同じ公式を用いて, $d^*: W^{m+1}_{(k)}(M) \rightarrow W^m_{(k-1)}(M)$ という有界作用素も定義される.

同様に, Δ の共役作用素 Δ^* は $\Delta^*: W^{m+2}_{(k)}(M) \rightarrow W^m_{(k)}(M)$ という有界作用素を定める.

❖ Sobolev の埋め込み定理

L^2 微分可能性によるアプローチが有用なのは, 次の Sobolev の埋め込み定理があるからである. この定理は, f が L^2 の意味での微分可能性をある程度もてば, 通常の意味でも微分可能性をもつことを主張する. ただし, 「 L^2 の意味で m 階微分可能性をもてば通常の意味でも m 階微分可能性をもつ」というわけにはいかず (そもそもこれは $m = 0$ において正しくない), 次元 n に応じて定まる適切な “余裕” が要る.

定理 7.2 (Sobolev). U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする. $f \in W^m(U)$ かつ $m > l + n/2$ のとき, $f \in C^l(U)$.

上記の定理から次が直ちにわかる.

系 7.3. (1) U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする. $f \in L^2(U)$ がすべての $m \geq 0$ について $W^m(U)$ に属していれば, $f \in C^\infty(U)$ である.

(2) 閉多様体 M についても, $f \in L^2(M)$ がすべての $m \geq 0$ について $W^m(M)$ に属していれば, $f \in C^\infty(M)$ である.

❖ コンパクト作用素, Rellich の定理

最後にコンパクト作用素について説明しておく. これらは有界作用素のなかでも “小さい” 作用素であって, ある種の近似においては誤差として無視してよいようなものである.

定義. Hilbert 空間のあいだの有界作用素 $T: V_1 \rightarrow V_2$ について, V_1 の任意の有界点列 $\{u_j\}$ に対し, $\{Tu_j\}$ が V_2 における収束部分列をもつとき, T は **コンパクト作用素** である, もしくは **完全連続作用素** であるという.

例 7.4. (1) 有限階作用素 (finite-rank operator, $\dim \operatorname{im} T < \infty$ をみたす有界作用素 T) はコンパクト作用素である. なぜなら Hilbert 空間 V の有限次元部分空間 W の有界点列は, Bolzano-Weierstrass の定理によりつねに収束部分列をもつから.

(2) 無限次元 Hilbert 空間 V について, 恒等作用素 $I: V \rightarrow V$ はコンパクト作用素でない. 実際, V の無限次元性により, 単位ベクトルのみからなる列 $\{u_j\}$ を, 相異なる任意の j, j' について $u_j \perp u_{j'}$ となるようにとれる. $\{u_j\}$ は有界点列だが, V において収束部分列をもたない.

次の Rellich の定理を正確に述べるために, 定義を一つ追加する. $W^m(U)$ における $C_c^\infty(U)$ の閉包のことを $W_0^m(U)$ と書くことにしよう. $W_0^m(U)$ は $W^m(U)$ の閉部分空間だから, Sobolev ノルム $\|\cdot\|_m$ に関しそれ自身 Hilbert 空間である.

定理 7.5 (Rellich). (1) U を $\mathbb{R}^n$ の有界な開集合とする. そのとき, $m > l$ とすれば包含写像 $W_0^m(U) \hookrightarrow W_0^l(U)$ はコンパクト作用素である.

(2) M を閉多様体とする. そのとき, $m > l$ とすれば包含写像 $W^m(M) \hookrightarrow W^l(M)$ はコンパクト作用素である.

定理 7.5 は, 気分としては Ascoli-Arzelà の定理*の L^2 版といえる.

さて, すでに述べたとおり, コンパクト作用素は有界作用素のうちで“小さい”. とくに例 7.4 は, コンパクト作用素 K が恒等作用素 I よりも“小さい”ことを示唆する. したがって $I - K$ は I にある意味で近いはずである. 次の定理は, そのことの表現の一つといえよう.

定理 7.6. Hilbert 空間 V から V へのコンパクト作用素 K に対し, $T = I - K$ とおけば次が成り立つ. (1) $\ker T$ は有限次元. (2) $\operatorname{im} T$ は V の閉部分空間. (3) $(\operatorname{im} T)^\perp$ も有限次元.

われわれは後で (1) だけを用いるので, それだけ証明しておくことにする†.

[定理 7.6 (1) の証明] $u \in \ker T$ ならば $u = Ku$ である. したがって, $\ker T$ の単位開球を B とすれば, $B = K(B)$ である. K のコンパクト性により, $K(B)$ (すなわち B) の任意の点列は V において収束部分列をもたねばならない. $\ker T$ が無限次元だと B はその性質をみたさないの (例 7.4 (2) と同様), $\ker T$ は有限次元でなければならない. $\square$

問題

問題 7.1. $f \in L^2(U)$ に対し, L^2 の意味での 2 階偏導関数 $\partial_{x^i} \partial_{x^j} f$ と $\partial_{x^j} \partial_{x^i} f$ が両方とも存在するとき, それらは等しいことを示せ.

問題 7.2. $W^m(U)$ が完備であることを証明せよ.

問題 7.3. 単位開球 $B \subset \mathbb{R}^n$ において $f(x) = |x|^\alpha$ とする ($\alpha \in \mathbb{R}$). $f \in L^2(B)$ となる α の範囲, $f \in W^1(B)$ となる α の範囲をそれぞれ決定せよ.

*コンパクト距離空間において, 一様有界かつ同程度連続な関数列は一様収束部分列をもつ.

†残りの主張も含めて知りたければ, 黒田成俊『関数解析』(共立出版, 1980 年) の定理 11.20 をみよ.