

6 L^2 空間と微分作用素の閉拡張 (2)

はじめに、引用の便宜のため、第 3 回で触れたことを明確に命題として書きとめておく。

命題 6.1. V を Hilbert 空間, W をその閉部分空間とする. そのとき $V = W \oplus W^\perp$ (直交直和分解) が成り立つ. ただし $W^\perp = \{u \in V \mid \text{任意の } v \in W \text{ に対し } (u, v) = 0\}$.

したがって $W^{\perp\perp} = W$ であることにも注意しておこう. 必ずしも閉でない部分空間 W に対しては $W^{\perp\perp} = \overline{W}$ である.

❖ 稠密な定義域をもつ作用素の共役作用素

Hilbert 空間 V_1 から V_2 への (線形) 作用素 T について, その「共役作用素」 T^* を定めたい. $u \in V_2$ に対し T^*u と書くべき V_1 の元 v には, どんな性質を要請すべきか——それは

$$\text{任意の } w \in \text{dom}(T) \text{ に対して } (u, Tw) = (v, w) \quad (6.1)$$

という条件をみたすことである.

定義. T が稠密な定義域をもつ ($\overline{\text{dom}(T)} = V_1$ である) と仮定する. そのとき T の**共役作用素** とよばれる V_2 から V_1 への作用素 T^* を,

$$\text{dom}(T^*) = \{u \in V_2 \mid \text{条件 (6.1) をみたすような } v \text{ が存在する}\}$$

とし, $u \in \text{dom}(T^*)$ に対し $T^*u = (\text{条件 (6.1) をみたす } v)$ と定めることで定義する.

T が稠密な定義域をもつ (「densely defined である」ということが多い) としたのは, そうすれば v は存在すれば一意的となるからである. 定義からただちに, T^* は閉作用素である.

例 6.2. $d: \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M)$ は $L_{(k)}^2(M)$ から $L_{(k+1)}^2(M)$ への作用素として稠密な定義域をもつ (命題 5.1) ので, 共役作用素 d^* が定義される. d^* は形式的共役作用素 $\delta: \Omega_c^{k+1}(M) \rightarrow \Omega_c^k(M)$ の拡張になっている. 実際, 任意の $\omega \in \Omega_c^{k+1}(M)$ に対して $\delta\omega$ は「任意の $\alpha \in \Omega_c^k(M)$ に対して $(\omega, d\alpha) = (\delta\omega, \alpha)$ 」をみたすからである. 同様に δ^* も定義されて d の拡張になっているし, Δ^* も定義されて Δ 自身の拡張になっている.

注 6.3. 最小閉拡張 $\bar{d}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\Delta}$ の共役作用素は d^* , δ^* , Δ^* と一致する. 一般に, 稠密な定義域をもつ可閉な作用素 T について $(\bar{T})^* = T^*$ が成り立つ (問題 6.1).

次の定理でみるように, 「稠密な定義域をもつ閉作用素」は (有界作用素に次いで) 性質のよい作用素のクラスである. 作用素はできるだけここに属するようにしておくのがよい. その観点からは, d , δ , Δ は原則としていつも最小閉拡張をとり $\bar{d}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\Delta}$ とした上で運用すべきである. 共役作用素 d^* , δ^* , Δ^* も, これらは $(\bar{d})^*$, $(\bar{\delta})^*$, $(\bar{\Delta})^*$ のことなのだと普段は思うのがよい*.

* d , δ , Δ の最小閉拡張を上線をつけずに同じ記号 d , δ , Δ で表すことも多いが, この講義では控えておく.

定理 6.4 (von Neumann). 稠密な定義域をもつ閉作用素 T に対して、次が成り立つ。

- (1) T^* も稠密な定義域をもつ閉作用素である。
- (2) $T^{**} = T$ である。
- (3) $(\ker T)^\perp = \overline{\operatorname{im} T^*}$, $(\operatorname{im} T)^\perp = \ker T^*$ である。

注 6.5. 証明は知らなくてもいいが、小さい字で書いておく。 T を V_1 から V_2 への作用素とする。

(1) $\overline{\operatorname{dom}(T^*)} = V_2$ を示す。 $u \in \operatorname{dom}(T^*)^\perp \Rightarrow u = 0$ を確かめよう。 T^* のグラフ $\{(T^*w, w) \mid w \in \operatorname{dom}(T^*)\}$ は、(6.1) によれば $-T$ のグラフ $\{(v, -Tv) \mid v \in \operatorname{dom}(T)\}$ の $V_1 \oplus V_2$ における直交補空間に外ならない。よって任意の $u \in V_2$ に対し $(0, u)$ は $(v, -Tv)$ と (T^*w, w) の和として表される。 $u = TT^*w + w$ で、 w との内積をとり $(u, w) = \|w\|^2 + \|T^*w\|^2$ 。 $u \in \operatorname{dom}(T^*)^\perp$ を仮定すれば、左辺は 0 だから $w = 0$ で、ゆえに $u = 0$ 。

(2) T^{**} のグラフは $-T^*$ のグラフの直交補空間に等しく、それは T のグラフに等しい。

(3) $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$ は明らか。 T を T^* に置き換えて $\ker T = (\operatorname{im} T^*)^\perp$ 。両辺の直交補空間をとる。

V_1 から V_2 への稠密な定義域をもつ閉作用素 T が与えられれば、定理 6.4 (3) と命題 6.1 から $V_1 = \ker T \oplus \overline{\operatorname{im} T^*}$ という直交直和分解がえられる（閉作用素の核はつねに閉部分空間であることに注意する）。 $T = \bar{\Delta}$ に対するこの分解が実質的に定理 3.3 の Hodge–de Rham–小平分解なのだが、そのことをみるための第一歩として、 Δ^* が何なのか知る必要がある。

❖ 完備 Riemann 多様体における d , δ , Δ の共役作用素

どんな Riemann 多様体についても、 d^* は例 6.2 で指摘したとおり δ の拡張である。 d^* は閉作用素なので、最小閉拡張の定義から d^* は $\bar{\delta}$ の拡張でもある。同様に、 δ^* は $\bar{d}$ の拡張であり、 Δ^* は $\bar{\Delta}$ の拡張である。

次の事実を紹介しよう。「完備 Riemann 多様体」の定義は後から行うので待ってほしい。

定理 6.6. 完備 Riemann 多様体において $d^* = \bar{\delta}$, $\delta^* = \bar{d}$, $\Delta^* = \bar{\Delta}$ である。

δ^* は $\bar{d}$ の拡張だから、 $\operatorname{dom}(\delta^*) \subset \operatorname{dom}(\bar{d})$ を示せば $\delta^* = \bar{d}$ がいえる。つまり $\omega \in \operatorname{dom}(\delta^*)$ に対し、 $\omega_j \rightarrow \omega$ かつ $d\omega_j \rightarrow \delta^*\omega$ となるような $\Omega_c^k(M)$ の元の列 $\{\omega_j\}$ の存在を確かめればよい。

$\delta^* = \bar{d}$ が証明されれば、定理 6.4 から $d^* = \bar{\delta}$ が従う。 $\Delta^* = \bar{\Delta}$ については $\delta^* = \bar{d}$ と同様の議論を用いることが考えられる。こうして、定理 6.6 の証明は次の命題 6.7 に帰着される。

命題 6.7. 完備 Riemann 多様体において次が成立する。

- (1) 任意の $\omega \in \operatorname{dom}(\delta^*)$ に対し、 $\omega_j \rightarrow \omega$, $d\omega_j \rightarrow \delta^*\omega$ をみたす $\Omega_c^k(M)$ の元の列 $\{\omega_j\}$ がある。
- (2) 任意の $\omega \in \operatorname{dom}(\Delta^*)$ に対し、 $\omega_j \rightarrow \omega$, $\Delta\omega_j \rightarrow \Delta^*\omega$ をみたす $\Omega_c^k(M)$ の元の列 $\{\omega_j\}$ がある。

ここでいったん、閉多様体に関する (1) の主張に話を限定する。

補題 6.8. 任意の Riemann 多様体 (M, g) について、 $\psi \in C^\infty(M)$ であって、有界で、かつ $|d\psi|$ も有界であるようなものが与えられたとする。そのとき $\omega \in \operatorname{dom}(\delta^*)$ ならば $\psi\omega \in \operatorname{dom}(\delta^*)$ で

$$\delta^*(\psi\omega) = \psi\delta^*\omega + d\psi \wedge \omega.$$

補題 6.8 の証明は問題とする (問題 6.2). これを用いて, 閉多様体について命題 6.7 の (1) を示す. 近似列 ω_j の構成は, 命題 5.1 で言及した Friedrichs の軟化子による議論だけでできる.

[閉 Riemann 多様体に関する命題 6.7 (1) の証明の概略] δ^* は線形なので, 1 の分割を使い, ω の台はあるチャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ に含まれると仮定してよい (補題 6.8 により, $\psi \in C^\infty(M)$ を $\omega \in \text{dom}(\delta^*)$ に掛けたものは $\text{dom}(\delta^*)$ に属するから). $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $\psi = \psi(x)$ を

$$\psi(x) = \begin{cases} I^{-1} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & (|x| < 1), \\ 0 & (|x| \geq 1), \end{cases} \quad \text{ただし } I = \int_{|x| \leq 1} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

によって定義し (**Friedrichs の軟化子の一例**), $\varepsilon > 0$ に対し $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \psi(x/\varepsilon)$ とおく.

$$\omega^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y) \omega(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x-y) \omega(y) dy$$

と定める (正確には ω を局所座標表示して各係数関数ごとに上記の積分を行う). $\varepsilon > 0$ が十分に小さければ, ω^ε は台が U に含まれる C^∞ 級微分形式である. これが実は $\omega^\varepsilon \rightarrow \omega$ をみtas. また詳細はここでは省くが, $d\omega^\varepsilon = (\delta^*\omega)^\varepsilon$ が成立し, したがって $d\omega^\varepsilon \rightarrow \delta^*\omega$ でもある. $\square$

閉多様体についての上記の議論は, 任意の $\text{dom}(\delta^*)$ の元を, $\text{supp } \omega$ がひとつのチャート U に含まれるような $\omega \in \text{dom}(\delta^*)$ の有限和として表せることに基づいている.

M が閉多様体でないときも, 任意に与えられた $\text{dom}(\delta^*)$ の元を, まずコンパクト台をもつ $\omega \in \text{dom}(\delta^*)$ で近似するという下処理ができるならば, 残りの議論は上と同じでよい. そのような下処理に必要なのは, よい性質をもつ皆既関数 $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ である.

定義. (1) $f \in C^\infty(M)$ が**皆既関数** (exhaustion function) であるとは, どんな $c \in \mathbb{R}$ に対しても, あるコンパクト集合 $K \subset M$ が存在して, 補集合 $M \setminus K$ では $f > c$ となることをいう.

(2) Riemann 多様体 (M, g) について, $|df|$ が有界であるような皆既関数 f が存在するとき, (M, g) は**完備**であるという.

注 6.9. 閉 Riemann 多様体は完備である. また Euclid 空間 $(\mathbb{R}^n, g_{\text{std}})$ も, $f(x) = \log(1 + |x|^2)$ をとれば完備であることがわかる.

われわれの定義 (2) は標準的でない. 標準的な定義との同値性については, たとえば J.-P. Demailly のレクチャーノート *Complex Analytic and Differential Geometry* 第 VIII 章の (2.4) Lemma をみよ*.

[完備 Riemann 多様体に関する命題 6.7 (1) の証明の概略] 完備性の定義にある皆既関数 f をとる. また $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を, $t \leq 0$ で $\chi(t) \equiv 0$, $t \geq 1$ で $\chi(t) \equiv 1$ で, 开区間 $(0, 1)$ では $0 \leq \chi(t) \leq 1$ であるような C^∞ 級関数とする. χ を平行移動して $\chi_j(t) = \chi(t - j)$ と定める. 与えられた $\omega \in \text{dom}(\delta^*)$ に対し $\omega_j = (\chi_j \circ f) \omega$ とおけば, $\text{supp } \omega_j$ はコンパクトで補題 6.8 より $\omega_j \in \text{dom}(\delta^*)$, また $\omega_j \rightarrow \omega$, $\delta^*\omega_j \rightarrow \delta^*\omega$ となっている. あとは閉多様体の場合と同じ. $\square$

*<https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf> から入手できる. なお, このレクチャーノートのかなりの部分は, フランス数学会から 1996 年に出版された講義録 J. Bertin, J.-P. Demailly, L. Illusie, C. Peters, *Introduction à la théorie de Hodge* に基づいているように思われる. Demailly さんは 2022 年に亡くなった.

命題 6.7 の (2) の証明には後で扱う知識が必要となる．たとえば，(1) と同じやり方をしようとする， $\omega \in \text{dom}(\Delta^*)$ に 1 の分割を構成する関数 ψ_λ を掛けた $\psi_\lambda \omega$ が $\text{dom}(\Delta^*)$ に属するかどうかが現時点ではわからないという難点がある（実際には属する）．

ともあれ，定理 6.6 を認めるならば，以下の結論が得られたことになる．

系 6.10. (M, g) が完備 Riemann 多様体ならば， $L^2_{(k)}(M) = \ker \bar{\Delta} \oplus \overline{\text{im } \Delta}$ （直交直和分解）．

❖ 今後の証明の方針

閉多様体の場合，以下のことがらが証明されて定理 3.3 の証明が完結する．

- (1) $\ker \bar{\Delta} = \mathcal{H}^k$ である．
- (2) $\text{im } \bar{\Delta}$ は閉である（「 $\bar{\Delta}$ は closed range をもつ」という）．すなわち $\overline{\text{im } \bar{\Delta}} = \text{im } \bar{\Delta}$ ．
- (3) $\text{im } \bar{\Delta} \cap \Omega^k(M) = \text{im } \Delta$ である．

(1) と (3) を得るには，次が示されればよい（ $\bar{\Delta} = \Delta^*$ に注意せよ）．これは Hodge ラプラシアンに関する**正則性定理**とよばれる（**楕円型正則性定理**の特別な場合）．

定理 6.11. $\omega \in \text{dom } \Delta^*$ について， $\Delta^* \omega = \eta$ が C^∞ 級微分形式ならば ω も C^∞ 級微分形式．したがって，そのときまた $\Delta \omega = \eta$ である．

(2) は，次の命題によって不等式の証明に帰着される．

命題 6.12. Hilbert 空間 V_1 から V_2 への閉作用素 T について，ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|u\| \leq C \|Tu\| \quad (\text{任意の } u \in \text{dom } T \cap (\ker T)^\perp \text{ に対して}) \quad (6.2)$$

であるとする．そのとき T は closed range をもつ．

[証明] $v_j \in \text{im } T$ ， $v_j \rightarrow v$ とすると， $Tu_j = v_j$ となる $u_j \in \text{dom } T$ が存在する．直交直和分解 $V_1 = \ker T \oplus (\ker T)^\perp$ の第 2 成分へと射影することで $u_j \in (\ker T)^\perp$ としてよい． v_j は Cauchy 列なので，仮定 (6.2) より u_j も Cauchy 列．極限 $u \in V_1$ が存在する． T は閉作用素だから $u \in \text{dom } T$ で $Tu = v$ ．ゆえに $v \in \text{im } T$ である． $\square$

われわれはさらに， Δ^* の“近似的な逆作用素”であるパラメトリクスを構成することによって定理 6.11 の証明と Δ^* に対する (6.2) の導出を行いたい．そのために Sobolev 空間を導入する．

問題

問題 6.1. 稠密な定義域をもつ可閉な作用素 T について $(\bar{T})^* = T^*$ であることを証明せよ．

問題 6.2. 補題 6.8 を証明せよ．まず $\omega_j \rightarrow \omega$ となる $\Omega^k_c(M)$ の元の列 ω_j をとる（命題 5.1 による）．任意の $\alpha \in \Omega^k_c(M)$ に対し $(\psi \omega_j, \delta \alpha) = (\omega_j, \delta(\psi \alpha)) + (d\psi \wedge \omega_j, \alpha)$ を示し，これを利用するとよい．