

5 L^2 空間と微分作用素の閉拡張 (1)

❖ 微分形式の L^2 空間

定理 3.3 の証明に向け、微分形式を Hilbert 空間の枠組みを用いて調べられるようにしたい。そのために微分形式のなす L^2 空間を導入する。

Riemann 多様体 (M, g) を考える (閉多様体とは限定しない。あまり難しい非コンパクト多様体を考えるつもりはないが、たとえば $\mathbb{R}^n$ くらいは問題にしたい)。

はじめに関数の場合を片づけてしまおう。連続とは限らない関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ が**可測**であるとは、各チャート (U, φ) について、 f の制限 $f|_U$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi(U)$ の上の関数とみなしたものが Lebesgue 可測であることをいう。可測関数 f が与えられたとき、さらに M のアトラス $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ とそれに従属する 1 の分割 $\{\psi_\lambda\}$ を任意に用意して

$$\int_M |f| dV_g = \sum_\lambda \int_{U_\lambda} \psi_\lambda |f| dV_g = \sum_\lambda \int_{\varphi_\lambda(U_\lambda)} \psi_\lambda |f| \sqrt{\det(g_{ij})} dx_\lambda^1 dx_\lambda^2 \cdots dx_\lambda^n \quad (5.1)$$

と定める*。積分 (5.1) の値が有限である (つまり $+\infty$ でない) とき、 f は**可積分**もしくは L^1 であるといい、そのとき f の積分が (5.1) の $|f|$ から絶対値記号を外した式で定義できる。また、

$$\int_M |f|^2 dV_g$$

を (5.1) と同様に定義し、その値が有限のとき、 f は**二乗可積分**もしくは L^2 であるという。すべての L^1 関数、 L^2 関数からなる空間をそれぞれ $L^1(M)$ 、 $L^2(M)$ で表す。

同様に、微分形式については次のように定義する。

定義. (1) 連続とは限らない微分 k 形式 ω ($\bigwedge^k T^*M$ の連続とは限らない切断) が**可測**であるとは、任意のチャート (U, φ) において、 ω を $\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ と表して $\omega_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ を $\varphi(U)$ 上で定義された関数とみなすと、それらがいずれも Lebesgue 可測であることをいう。

(2) 可測な微分形式 ω について $|\omega|$ は可測関数である。 $|\omega|$ が可積分 [二乗可積分] な関数であるとき、微分形式 ω は**可積分**もしくは L^1 [二乗可積分もしくは L^2] であるという。

私たちは L^2 微分 k 形式のほうに興味がある。その全体を $L^2_{(k)}(M)$ で表そう†。これが Hilbert 空間 (完備計量ベクトル空間) だという事実がとにかく重要であるが、内積を $(\cdot, \cdot)$ 定義するた

* (1.3) で行った積分の定義では f がコンパクト台をもつことを仮定したが、ここではその仮定はおいていない。 $|f|$ は非負値なので、(5.1) の第 2 辺ないし第 3 辺は、値として $+\infty$ も許せばつねに意味をもつ。

† この $L^2_{(k)}$ はいちおう伝統的な記号のはず。ただ、後に導入する L^2 コホモロジー群は $H^k_{(2)}$ と書かれることが多いので、それに倣って L^2 微分形式の空間を $\Omega^k_{(2)}$ で表すのも理に合っていると思う (しかしこの記号を $\Omega^k \cap L^2_{(k)}$ の意味で使う人もいるのが悩ましい)。 $L^2 \Omega^k$ を採用する人もいる。他にもさまざまである。

めには, $\omega, \eta \in L^2_{(k)}(M)$ に対し $\langle \omega, \eta \rangle$ が L^1 関数であることを確かめなければならない. これは

$$\int_M |\langle \omega, \eta \rangle| dV_g \leq \int_M |\omega| |\eta| dV_g \leq \left(\int_M |\omega|^2 dV_g \right)^{1/2} \left(\int_M |\eta|^2 dV_g \right)^{1/2}$$

という計算から従う (2 個目の $\leq$ は積分に関する Schwarz の不等式). したがって,

$$(\omega, \eta) = \int_M \langle \omega, \eta \rangle dV_g, \quad \|\omega\| = \sqrt{(\omega, \omega)}$$

という $\Omega^k_c(M)$ において与えた定義 (第 1 回参照) が, そのまま $L^2_{(k)}(M)$ においても通用する. この内積に関する $L^2_{(k)}(M)$ の完備性は, $L^2(\mathbb{R}^n)$ の場合にはよく知られているであろう. 一般の場合の証明は各自で試みてほしい.

命題 5.1. 任意の Riemann 多様体 (σ コンパクトなもの) において, コンパクト台をもつ微分 k 形式の空間 $\Omega^k_c(M)$ は $L^2_{(k)}(M)$ の稠密な部分空間である.

命題 5.1 の証明の概略を述べる. まず積分の定義を見つめれば, $\omega \in L^2_{(k)}(M)$ がコンパクト台をもつ L^2 微分 k 形式 ω' によって任意の精度で近似できることはすぐにわかる. そこで ω' を $\Omega^k_c(M)$ の元で近似すればよい. これは Friedrichs の軟化子を使えばできる. M の各点の近傍で ω' の値の加重平均をとるのである*.

❖ S^1 上の L^2 微分形式

$M = S^1$ がもっとも重要な例であり, この場合に起こることを事細かに把握しておく必要がある. 気分の問題だけではなく, S^1 (ないしトーラス T^n) のときに得られる結論を, 定理 3.3 を一般的な仮定のもとで証明する際に使うからである.

ここで, S^1 は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ のこととしておこう. 基本的に例 1.4 で触れたトーラス T^n の $n = 1$ の場合を考えているのだが, 以下の式 (5.2) を単純な形にするために, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とせず係数 2π をつけておいた. S^1 上の関数や微分 1 形式は, $\mathbb{R}$ 上の関数や微分 1 形式であって周期 2π をもつもの ($\tau: x \mapsto x + 2\pi$ によって引き戻しても不変なもの) と同一視できる.

$$\Omega^k_{\text{per}}(\mathbb{R}) = \{ \omega \in \Omega^k(\mathbb{R}) \mid \tau^* \omega = \omega \}, \quad (k = 0, 1)$$

という記号を導入し, $\Omega^0_{\text{per}}(\mathbb{R})$ を $C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R})$ と書く. $\Omega^1_{\text{per}}(\mathbb{R})$ の元も $f(x)dx$ の形に表してしまえば実は $f \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R})$ となり, この対応によって $\Omega^1_{\text{per}}(\mathbb{R}) \cong C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R})$ である (線形同型).

S^1 の Riemann 計量は例 1.4 と同様に定める ($\mathbb{R}$ の任意の点における接ベクトル u, v の内積と, それらの射影による push-forward の内積が一致するようにする). すると, 細かな計算は省くが, たとえば関数 $f \in C^\infty(S^1)$ ($C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R})$ の元と同一視する) の積分は

$$\int_{S^1} f dV_g = \int_0^{2\pi} f dx$$

*Photoshop のような画像編集ソフトウェアで画像をぼかすのと同じこと. 黒田成俊『関数解析』(共立出版, 1980 年) 補題 6.8 をみよ.

によって求めることができる。微分形式の L^2 内積 (ω, η) も $[0, 2\pi]$ における積分として求められるし、 C^∞ 級の関数や微分形式でなくても、 L^1 , L^2 でも同様に扱える。

S^1 (ないし T^n) についての議論を一般の場合に先行して実行できる理由は、Fourier 展開 (の L^2 理論) という強力な道具があるからである*。話を単純にするため、複素数値関数を考えよう。周期 2π をもつ任意の複素数値連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} \quad (\text{各 } a_m \text{ は複素数}) \quad (5.2)$$

と Fourier 展開することができる (右辺は一様収束)。こうして f から数列 $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ を一意的に得ることができるが、この対応を拡張して、周期 2π をもつ複素数値可測関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ で $\int_0^{2\pi} |f|^2 dx < +\infty$ をみたすようなものの空間 $L^2_{\text{per}, \mathbb{C}}(\mathbb{R})$ からの 線形同型写像

$$L^2_{\text{per}, \mathbb{C}}(\mathbb{R}) \rightarrow l^2_{\mathbb{C}} = \left\{ \{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \mid \text{各 } a_m \text{ は複素数で } \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m|^2 < +\infty \right\}$$

が得られる ($l^2_{\mathbb{C}}$ については例 3.9 と p. 11 の脚注で言及した)。しかも、これは複素 Hilbert 空間の同型写像になっている (すなわち Hermite 内積も保つ)。ただし $L^2_{\text{per}, \mathbb{C}}(\mathbb{R})$ と $l^2_{\mathbb{C}}$ の Hermite 内積は

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g} dx, \quad (\{a_m\}, \{b_m\}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \bar{b}_m$$

と定めておく。

❖ 有界線形作用素

われわれは d , δ , Δ といった微分作用素を L^2 微分形式の枠組みで考察したい。そのためには Hilbert 空間のあいだの「非有界線形作用素」を取り扱う必要があるのだが、前置きとして、いったん有界線形作用素について述べる。

Hilbert 空間 V_1, V_2 に対し、連続な線形写像 $T: V_1 \rightarrow V_2$ に着目するのは自然であろう。ところでもし線形写像 $T: V_1 \rightarrow V_2$ が**有界線形作用素**である、すなわちある $C > 0$ が存在して

$$\|Tu\| \leq C\|u\| \quad (\text{任意の } u \in V_1 \text{ について}) \quad (5.3)$$

をみたすならば、 T の連続性はただちに従う。実は、次の命題 5.2 で述べるとおり、 T の有界性は連続性のための必要条件でもある†。

命題 5.2. Hilbert 空間のあいだの線形写像 $T: V_1 \rightarrow V_2$ について、 T が連続 $\iff T$ が有界。

なお、(5.3) をみたす C の下限を有界線形作用素 T の**作用素ノルム**という。

*以下については、前掲の黒田『関数解析』の第 4 章をみよ。

†黒田『関数解析』定理 7.1.

❖ 微分作用素の閉拡張

一般に微分作用素は (L^2 空間のあいだの) 有界線形作用素に拡張されない. したがって, われわれは有界でない線形作用素を “異常なもの” として考察から排除できない.

ここでひとつ約束を設けよう. 「 V_1 から V_2 への非有界線形作用素」といったときは, T の定義域 $\text{dom}(T)$ は V_1 の部分空間であれば何でもよく, 必ずしも $\text{dom}(T) = V_1$ でなくてよいことにする. 写像としては $T: \text{dom}(T) \rightarrow V_2$ である.

非有界線形作用素のうちで比較的よい性質をもつとみなされているのが, 閉作用素とよばれるタイプのものである.

定義. Hilbert 空間 V_1 から V_2 への非有界線形作用素 T について, $\text{dom}(T)$ の元からなる任意の列 $\{u_j\}$ に対し

$$u_j \rightarrow u, \quad Tu_j \rightarrow v \quad \Rightarrow \quad u \in \text{dom}(T), \quad Tu = v \quad (5.4)$$

が成り立つとき, T は**閉作用素**であるという.

閉作用素の概念がわれわれにとって重要なのは, d, δ, Δ といった $\Omega_c^k(M)$ で定義された微分作用素が, $L^2_{(k)}(M)$ からの閉作用素に拡張できるからである (**可閉**とか**前閉**であるという). 可閉性を示すには, (5.4) が当初の定義域においては成立していることを確かめればよいことが知られている (問題 5.2). たとえば d については, $\omega_j \xrightarrow{L^2} \omega, d\omega_j \xrightarrow{L^2} \eta$ をみたす $\omega_j, \omega \in \Omega_c^k(M)$ および $\eta \in \Omega_c^{k+1}(M)$ があるとき, $d\omega = \eta$ であることを示せばよい. そしてこれは

$$(d\omega, \alpha) = (\omega, \delta\alpha) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\omega_j, \delta\alpha) = \lim_{j \rightarrow \infty} (d\omega_j, \alpha) = (\eta, \alpha) \quad (\text{任意の } \alpha \in \Omega_c^{k+1}(M) \text{ について})$$

という計算でわかる (任意の $\alpha \in \Omega_c^{k+1}(M)$ について $(d\omega - \eta, \alpha) = 0$ なのだから, $\alpha = d\omega - \eta$ とすれば $d\omega - \eta = 0$ が従う).

Hilbert 空間 V_1 から V_2 への可閉な線形作用素 T について,

$$\text{dom}(\bar{T}) = \{u \in V_1 \mid u_j \rightarrow u, Tu_j \rightarrow v \text{ をみたす } \text{dom}(T) \text{ の元の列 } \{u_j\} \text{ と } v \in V_2 \text{ が存在}\}$$

と定め, $u \in \text{dom}(\bar{T})$ に対し上記の条件に現れる v を用いて $\bar{T}u = v$ と定義する. そうして得られる閉作用素 $\bar{T}$ を, T の**最小閉拡張**とか**閉包**とよぶ. 以降の議論では, d, δ, Δ の最小閉拡張を考察の対象とすることになる.

問題

問題 5.1. 閉 Riemann 多様体 (M, g) では $L^2(M) \subset L^1(M)$ である. そのことを示せ (ヒント: 積分に関する Schwarz の不等式). また, $\mathbb{R}^n$ では $L^2(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$ であることを示せ.

問題 5.2. Hilbert 空間 V_1 から V_2 への非有界線形作用素 T について (★) 「 $\text{dom}(T)$ の元の列 $\{u_j\}$ および $u \in \text{dom}(T), v \in V_2$ が『 $u_j \rightarrow u, Tu_j \rightarrow v$ 』をみたすならば必ず $Tu = v$ 」という条件が成り立っているとき, 本文中の $\bar{T}$ が閉作用素となることを示せ. また, 条件 (★) は 「 $\text{dom}(T)$ の元の列 $\{u_j\}$ および $v \in V_2$ が『 $u_j \rightarrow 0, Tu_j \rightarrow v$ 』をみたすならば必ず $v = 0$ 」と同値であることを示せ.