

4 応用：Bochner テクニック

系 3.5 を用いると、「閉 Riemann 多様体 (M, g) について (状況に応じた何らかの適切な) 曲率が (適切な意味で) 正値をもつならば、 M は位相幾何学的にみて単純な形をしていなければならない」というタイプの結果を、比較的簡単に証明できる場合がある。その例として以下の定理 4.4 を紹介する*。

❖ Levi-Civita 接続

何れともあれ Riemann 多様体 (M, g) の曲率について説明しなければはじまらない。これは通常、 (M, g) に付随する Levi-Civita 接続を用いて定義される。

多様体 M 上に広がる接ベクトルの場 (field) を**ベクトル場**とよぶことを思い出す[†]。正確には接束 $TM = \coprod_{p \in M} T_p M$ の切断のことで、それらの全体 $\Gamma(TM)$ を $\mathfrak{X}(M)$ と書く。

関数 $f \in C^\infty(M)$ が与えられていて、さらにベクトル場 $X = \{X_p\}_{p \in M}$ があると、 f を各点において接ベクトル $X_p \in T_p M$ で微分するという操作が考えられる。その結果得られる新しい関数を Xf で表す。すなわち

$$(Xf)(p) = X_p f.$$

さらに、 f はベクトル値 ($\mathbb{R}^r$ 値) 関数であるとしてもかまわない (成分ごとに微分する)。

さて、多様体 M 上のベクトル束 E の切断とはベクトル値関数の拡張概念だった。ベクトル値関数のときと同様に、切断 $s \in \Gamma(E)$ をベクトル場 X によって“微分する”という概念を導入したい。つまり

$$\mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \quad (X, s) \mapsto \nabla_X s$$

という写像であって、“微分”の拡張概念としてふさわしい性質を持つようなものを考えるのである。具体的には次の条件を課す。

- (i) $\nabla_X s$ は X について $C^\infty(M)$ 線形。
- (ii) $f \in C^\infty(M)$ について Leibniz 則 $\nabla_X (fs) = f \nabla_X s + (Xf)s$ が成立する。

これらをみたすような“微分のルール”は一般に無数にある。それらを総称してベクトル束 E の**接続**というのである。

*詳細はまったく述べないが、複素多様体上の正則直線束に関する小平の消滅定理や、「向きづけられた $4k$ 次元閉 Riemann 多様体 (M, g) がさらにスピン構造をもつとき、スカラー曲率がすべての点で正ならば $\hat{A}(M) = 0$ 」という Lichnerowicz の定理も同様のアイデアに基づく (後者については Atiyah-Singer の指数定理も用いる)。

[†]「電場」、「磁場」というときの「場」である。関数のことを「スカラー場」といってもよい。ちなみに微分形式も「場」であって、「交代共変テンソル場」とよぶこともできるのだが、その重要性ゆえに「微分形式」という別名がついている。

ところで、 M に Riemann 計量 g が定められている状況では、次の命題 4.1 によって $E = TM$ に特定の接続を付与することができる。

命題 4.1. Riemann 多様体 (M, g) には、 TM の接続であって、ねじれがなく、 g と整合的であるようなものがただ一つ存在する。（これを **Levi-Civita 接続** とか **Riemann 接続** という。）

命題 4.1 に登場した条件の意味は説明しない。「よい条件を選んで課すことで TM の接続をただ一つに絞れるのだ」ということだけ知っておけばよい。証明ももちろん省略するが、Levi-Civita 接続を表す具体的な式だけは与えておこう。 $E = TM$ なので、 E の切断とはベクトル場に外ならない。われわれが定義すべきものは $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対する $\nabla_X Y$ である。チャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ において $X = \sum_i X^i \partial_i$, $Y = \sum_i Y^i \partial_i$ と表すとき、

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \quad (4.1)$$

とにおいて

$$\nabla_X Y = \sum_k (\nabla_X Y)^k \partial_k, \quad (\nabla_X Y)^k = X(Y^k) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k X^i Y^j$$

と定義する（ $X(Y^k)$ は U 上の関数 Y^k の X による微分）。 Γ_{ij}^k を g の定める **Christoffel 記号** という*。慣例として「記号」とよぶのであるが、 U で定義された n^3 個の関数である。

❖ Riemann 曲率テンソル, Ricci テンソル

一般に、ベクトル束 E の接続 ∇ があるとその曲率 R というものが定義される。 R は「 $\text{End } E$ に値をもつ微分 2 形式」である。その意味を説明したい。

注 4.2. R の幾何学的な意味を十分に説明するには紙幅が足りないが、一応試してみる。 E の接続 ∇ があると、 $p \in M$ を始点とする曲線 γ に沿って E_p のベクトル v を“平行移動”する（微分がゼロとなる状態を保ちつつ移動する）ことができる。 γ が閉曲線になっていれば、最終的に再び E_p のベクトル w がえられる。 v と w は一般には異なるベクトルとなる。その違いを無限小レベルで表すのが曲率 R である。中原幹夫『理論物理学のための幾何学とトポロジー I』（日本評論社、原著第 2 版、2018 年）の 7.3 節をみよ。

各点 $p \in M$ において、ベクトル空間 E_p 上のすべての線形変換 $E_p \rightarrow E_p$ からなるベクトル空間を $\text{End } E_p$ と書く。 $\text{End } E_p$ を各点におけるファイバーとするベクトル束 $\text{End } E$ を考える。 $\text{End } E$ は自然に C^∞ 級ベクトル束となる。ただしその詳細は知らなくても、 $\text{End } E$ の切断がもつ次の性質を知っておけばここでは十分である。

- (1) $T \in \Gamma(\text{End } E)$ に対し、 $p \in M$ における値 T_p は（もちろん） E_p の線形変換。
- (2) $T \in \Gamma(\text{End } E)$ と $s \in \Gamma(E)$ に対し、 $(Ts)_p = T_p s_p \in E_p$ と定義すれば $Ts \in \Gamma(E)$ 。 T や s が M の開集合 U だけで定義された切断であっても、同様に $Ts \in \Gamma(U, E)$ 。

* Γ_{ij}^k の添字の位置は意図的にこうしている。ただし、 Γ_{ij}^k と書く人もいるし $\Gamma_{ij}^{}$ と書く人もいる。

R が「 $\text{End } E$ に値をもつ微分 2 形式である」という言明は、 R が $\bigwedge^2 T_p^* M \otimes \text{End } E_p$ を各点におけるファイバーとするベクトル束 $\bigwedge^2 T^* M \otimes \text{End } E$ の切断であることを意味する。先ほどと同様に、 $\bigwedge^2 T^* M \otimes \text{End } E$ も自然に C^∞ 級ベクトル束となるが、その詳細は知らなくてもよい。次を把握しておこう。

- (3) $A \in \Gamma(\bigwedge^2 T^* M \otimes \text{End } E)$ とベクトル場 X, Y に対し、 $(A(X, Y))_p = A_p(X_p, Y_p)$ と定義すれば $A(X, Y) \in \Gamma(\text{End } E)$ 。 A や X, Y が M の開集合 U だけで定義されている場合も、同様に $A(X, Y) \in \Gamma(U, \text{End } E)$ 。

さて、Riemann 多様体 (M, g) について、Levi-Civita 接続の曲率 R を **(Riemann) 曲率テンソル** という。いま考えているのは $E = TM$ の場合だから、上記の性質 (3) により $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対し $R(X, Y)$ は $\text{End}(TM)$ の切断であって、性質 (2) から $Z \in \mathfrak{X}(M)$ について $R(X, Y)Z$ というベクトル場が定まる。各チャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ 上で

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_l = \sum_k R_{ij}{}^k{}_l \partial_k \quad (4.2)$$

と書いて、 $R_{ij}{}^k{}_l$ のことを Riemann 曲率テンソル R の局所座標表示とよぶ。

さらに、 $\text{Ric} \in \Gamma(T^* M \otimes T^* M)$ が以下で定義される **(Ricci テンソル)**。これは $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ を代入することで $\text{Ric}(X, Y)$ という関数が得られるようなものなのだが、各チャート上では、 $\text{Ric}(\partial_i, \partial_j)$ は曲率テンソル R の局所表示 (4.2) を用いて

$$\text{Ric}(\partial_i, \partial_j) = R_{ij}, \quad R_{ij} = \sum_k R_{ki}{}^l{}_j \partial_l \quad (4.3)$$

で与えられる。(4.3) により Ric は各点ごとに $T_p M$ 上の対称双線形形式を定める (問題 4.1)。

一般のベクトル束の接続に対する曲率の定義は省き、Riemann 多様体上の Levi-Civita 接続に対する曲率テンソル R の局所座標表示 $R_{ij}{}^k{}_l$ を与える具体的な公式のみ与えておくことにしよう。 $R_{ij}{}^k{}_l$ は (4.1) で定義した Γ_{ij}^k を用いて

$$R_{ij}{}^k{}_l = \partial_i \Gamma_{jl}^k - \partial_j \Gamma_{il}^k + \sum_m \Gamma_{im}^k \Gamma_{jl}^m - \sum_m \Gamma_{jm}^k \Gamma_{il}^m \quad (4.4)$$

で与えられる。

❖ Weizenböck の公式, Bochner の定理

命題 4.3 (微分 1 形式に関する Weizenböck の公式). Riemann 多様体 (M, g) の微分 1 形式 ω について

$$\Delta \omega = \nabla^* \nabla \omega + \text{Ric}(\omega).$$

ただし左辺の Δ は Hodge ラプラシアン $d\delta + \delta d$ で、右辺の ∇ は Levi-Civita 接続。

右辺第 1 項の意味は詳しく述べないが、Levi-Civita 接続が $\nabla: \Gamma(T^*M) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ という 1 階線形微分作用素を与えることを用いている。 T^*M と $T^*M \otimes T^*M$ には、実は Riemann 計量 g から自然に定まる計量がどちらにも備わっているため、それらに関する ∇ の形式的共役作用素を考えて ∇^* と書く。すると (M, g) が閉 Riemann 多様体ならば $(\nabla^* \nabla \omega, \omega) = \|\nabla \omega\|^2 \geq 0$ となる。第 1 項について重要なことはこの非負性だけである。

右辺第 2 項の $\text{Ric}(\omega)$ は、各チャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ において (4.3) の R_{ij} を用いて

$$\text{Ric}(\omega) = \sum_i \text{Ric}(\omega)_i dx^i, \quad \text{Ric}(\omega)_i = \sum_{j,k} R_{ij} g^{jk} \omega_k$$

で定義されるような微分 1 形式を表す記号である。

定理 4.4 (Bochner). 閉 Riemann 多様体 (M, g) において、 Ric が各点 $p \in M$ について $T_p M$ 上の正定値対称双線形形式を与えているならば、 $H_{\text{dR}}^1(M) = 0$ である。

[証明] 系 3.5 より $\mathcal{H}^1 = 0$ を証明すれば十分である。 ω を任意の調和 1 形式とする。そのとき、命題 4.3 によると $0 = \nabla^* \nabla \omega + \text{Ric}(\omega)$ 。各辺と ω の L^2 内積をとると

$$0 = (\nabla^* \nabla \omega, \omega) + (\text{Ric}(\omega), \omega).$$

右辺第 1 項は前述のとおり $\|\nabla \omega\|^2$ に等しく、非負である。右辺第 2 項は各点ごとに定義された内積 $\langle \text{Ric}(\omega), \omega \rangle$ の積分だが、各チャートでは

$$\langle \text{Ric}(\omega), \omega \rangle = \sum_{i,j} g^{ij} \text{Ric}(\omega)_i \omega_j = \sum_{i,j,k,l} g^{ij} R_{ik} g^{kl} \omega_l \omega_j = \sum_{i,k} R_{ik} \left(\sum_j g^{ij} \omega_j \right) \left(\sum_l g^{kl} \omega_l \right)$$

と計算できて、 Ric の正定値性よりこれは ≥ 0 。ゆえにその積分 $(\text{Ric}(\omega), \omega)$ も非負値である。以上より $\|\nabla \omega\|^2 = (\text{Ric}(\omega), \omega) = 0$ でなければならない。とくに各点で $\langle \text{Ric}(\omega), \omega \rangle = 0$ であることがわかるから、上の計算から $\sum_j g^{ij} \omega_j = 0$ 。 g^{ij} は行列として可逆だから $\omega_j = 0$ である。 $\square$

注 4.5. 定理 4.4 は調和積分論を用いずに示すこともできる。Bonnet-Myers の定理より、 Ric が各点において正定値という仮定から、 M の基本群 $\pi_1(M)$ が有限群であることが従う。整係数ホモロジー群 $H_1(M; \mathbb{Z})$ は $\pi_1(M)$ の Abel 化に等しいからやはり有限群。de Rham の定理によって $H_{\text{dR}}^1(M) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(M; \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ なので、 $H_{\text{dR}}^1(M) = 0$ である (問題 4.2)。こちらの議論のほうが、定理 4.4 よりも精密なことがわかってよい。ただし、Bonnet-Myers の定理を証明するためには Riemann 幾何学をそれなりに深く展開しなければならないので、それとはまったく異なるアプローチである調和積分論による証明にも意義がある。

問題

問題 4.1. 式 (4.4) と式 (4.1) を用いて $R_{ij} = R_{ji}$ を示せ。(これで、 Ric が各点 $p \in M$ で $T_p M$ 上の対称双線形形式を与えることを確かめたことになる。)

問題 4.2. $H_1(M; \mathbb{Z})$ が有限群ならば $H_{\text{dR}}^1(M) = 0$ であることを示せ。また、 G が無限位数の Abel 群 ($\mathbb{Z}$ 加群) でも $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{R})$ は 0 になることがある。例を示せ。