3　調和積分論の主定理

❖　定理の主張

　Riemann 多様体 (M,g) を考える．Hodge ラプラシアン $\Delta = d\delta + \delta d$ について $\Delta\omega = 0$ をみたす $\omega \in \Omega^k(M)$ を**調和**（**微分**）**形式**という．すべての調和形式からなる $\Omega^k(M)$ の部分ベクトル空間を $\mathcal{H}^k$ で表すことにする．

　閉 Riemann 多様体では

$$\omega \in \mathcal{H}^k \quad\Longleftrightarrow\quad d\omega = 0 \text{ かつ } \delta\omega = 0 \tag{3.1}$$

が成り立つ．というのは $(\Delta\omega,\omega) = (\delta d\omega,\omega) + (d\delta\omega,\omega) = \|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2$ だからである．

注 3.1．(M,g) がコンパクトでなければ，$(\delta d\omega,\omega) = \|d\omega\|^2$ のような変形（俗に「部分積分」と言う）は一般には許されない．実際，(3.1) はこのままでは成り立たない（問題 3.1）．

例 3.2．調和 0 形式を**調和関数**という．連結な閉 Riemann 多様体上の調和関数は，(3.1) より $df = 0$ をみたさなければならないから定数関数に限られる*．

定理 3.3 (Hodge–de Rham–小平分解)**.** 閉 Riemann 多様体 (M,g) において，$\Omega^k(M)$ は

$$\begin{aligned}\Omega^k(M) &= \mathcal{H}^k \oplus \operatorname{im}\Delta \\ &= \mathcal{H}^k \oplus \operatorname{im} d \oplus \operatorname{im}\delta\end{aligned} \tag{3.2}$$

のように直交直和分解される．ここで $\operatorname{im}\Delta$，$\operatorname{im} d$，$\operatorname{im}\delta$ は，Δ，d，δ をいずれも C^∞ 級微分形式に作用する写像とみたときの像を表している．

　わざわざ最後の但し書きをつけたのは，後述のように，証明の際は Δ，d，δ の定義域を拡張して考えることになるからである．

注 3.4．(3.2) の第 1 式で，$\mathcal{H}^k \perp \operatorname{im}\Delta$ となるのは Δ が形式的自己共役であることから従う当然の帰結．実際，$\omega \in \mathcal{H}^k$ ならば $(\omega,\Delta\eta) = (\Delta\omega,\eta) = 0$ となる．非自明なのは，$\mathcal{H}^k$ と $\operatorname{im}\Delta$ で $\Omega^k(M)$ が確かに張られるのだという事実のほうである．

　また (3.2) について，第 2 式は次のように第 1 式からすぐ導ける．Δ の定義から $\operatorname{im}\Delta$ は当然 $\operatorname{im} d + \operatorname{im}\delta$ に含まれるので，第 1 式から $\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k + \operatorname{im} d + \operatorname{im}\delta$ がわかる．δ の定義からただちに $\operatorname{im} d \perp \ker\delta$，$\operatorname{im}\delta \perp \ker d$ が従い，それと (3.1) より $\mathcal{H}^k$ は $\operatorname{im} d$ にも $\operatorname{im}\delta$ にも直交する．$\operatorname{im} d \perp \operatorname{im}\delta$ も明らか．

　定理 3.3 から次の重要な事実が結論される．

---

*$\Delta f = 0$ は熱的な定常状態にある系の温度分布の方程式である．閉多様体で熱的定常状態が達成されていれば温度が空間方向にも一定というのは直観的にも納得がいく．非コンパクトなら，空間方向に一定ではないが熱的定常状態にあるような温度分布は，空間のへりに熱源（熱浴）がある状況を想定すればつくれそうだ．ただし「空間のへり」は無限の彼方にあるかもしれない．

系 3.5. 閉 Riemann 多様体 (M,g) の任意の de Rham コホモロジー類 $c \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ に対し，c に属する調和形式 ω がただ一つ存在する．この対応により $H^k_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathcal{H}^k$（線形同型）．

［定理 3.3 $\Rightarrow$ 系 3.5 の証明］(3.1) により $\mathcal{H}^k \oplus \operatorname{im} d \subset \ker d$ である．そのことと $\ker d \perp \operatorname{im}\delta$（したがって $\ker d \cap \operatorname{im}\delta = 0$）および (3.2) から $\mathcal{H}^k \oplus \operatorname{im} d = \ker d$ が成り立つ．よって $H^k_{\mathrm{dR}}(M) = \ker d/\operatorname{im} d \cong \mathcal{H}^k$．（なお，同様にして $\mathcal{H}^k \oplus \operatorname{im}\delta = \ker\delta$ がわかることにも注意．） □

系 3.5 の応用例として，Bochner テクニックによる各種の消滅定理の証明があげられる（次回）．また，向きづけられた閉多様体 M における Poincaré 双対性も系 3.5 を用いて証明できる．

系 3.6 (de Rham コホモロジー群に関する **Poincaré 双対性**). 向きづけられた閉多様体 M について定義される双線形写像

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \times H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathbb{R}, \qquad ([\omega],[\eta]) \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

は非退化である．したがってこの双線形写像は $H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M) \cong (H^k_{\mathrm{dR}}(M))^*$ という線形同型を導く．

証明については F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 1983 の 6.13 Theorem を参照せよ*．またその直後の 6.14 Remark にあるとおり，de Rham の定理と合わせることで，実係数ホモロジー群とのあいだの Poincaré 双対性 $H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M) \cong H_k(M;\mathbb{R})$ がえられる．

❖ なぜ $\Delta = d\delta + \delta d$ を考えるのか

われわれが問題にしているのは de Rham 複体

$$\cdots \to \Omega^{k-2}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+2}(M) \to \cdots \tag{3.3}$$

だが，かわりに有限次元計量ベクトル空間からなる複体

$$\cdots \to V^{k-2} \xrightarrow{L} V^{k-1} \xrightarrow{L} V^k \xrightarrow{L} V^{k+1} \xrightarrow{L} V^{k+2} \to \cdots \tag{3.4}$$

の場合を考えてみよう．はじめに系 3.5 の対応物を検討し，そのあとで定理 3.3 の対応物を議論する．必要に応じて，$L\colon V^k \to V^{k+1}$ のことを L_k とも書く．

例 3.7. 複体 (3.4) のコホモロジー群 $H^k = \ker L_k/\operatorname{im} L_{k-1}$ からコホモロジー類 c をとる．c の代表元 u_0 を任意に一つ選ぶと，c は $c = u_0 + \operatorname{im} L$ と表される $\ker L$ のアフィン部分空間である．そのような c から代表元を選びとるための統一的なルールをどのようにして定められるか考える．

V^k が内積を備えていることを利用して，原点 $0 \in V^k$ から c へと垂線をおろし，その足 u を採用するというのが一つのよいルールだと思われる．つまり

$$u \in c \quad \text{かつ} \quad u \perp \operatorname{im} L \tag{3.5}$$

*調和積分論を使わない証明が R. Bott & L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982 の §5 にある．

を要請することで u を一意的に定める．別の言い方をすれば，ベクトル u_0 を正射影により $\operatorname{im} L$ 成分と $(\operatorname{im} L)^\perp$ 成分に分解し，$(\operatorname{im} L)^\perp$ 成分を u とする[*]．

ここで内積を $(\cdot,\cdot)$ で表し，$(Lu, v) = (u, \Lambda v)$ で定義される L の共役写像 $\Lambda\colon V^{k+1} \to V^k$ を考えると，周知のとおり $(\operatorname{im} L)^\perp = \ker \Lambda$ である．実際，

$$\begin{aligned} u \perp \operatorname{im} L \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{任意の } v \in V^{k-1} \text{ に対し } (u, Lv) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{任意の } v \in V^{k-1} \text{ に対し } (\Lambda u, v) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \Lambda u = 0. \end{aligned}$$

すなわち条件 (3.5) は $u \in c$ かつ $\Lambda u = 0$ とも言い換えられる．

$\Delta = L\Lambda + \Lambda L$ とおけば，$u \in c$ という前提のもとで $\Lambda u = 0$ は $\Delta u = 0$ と同値である（なぜなら (3.1) と同じ議論により $\Delta u = 0$ は $Lu = 0$ かつ $\Lambda u = 0$ と同値だから）．こうして系 3.5 の有限次元版を得る．

例 3.8．$\Delta = L\Lambda + \Lambda L$ は $(\Delta u, v) = (u, \Delta v)$ をみたす．したがって $(\operatorname{im} \Delta)^\perp = \ker \Delta$ だから，$V^k = \ker \Delta \oplus \operatorname{im} \Delta$ という直交直和分解が成立する．これが定理 3.3 の有限次元版である．

以上の 2 つの例を念頭におくと，「de Rham 複体 (3.3) についても同様のことが成立する」と期待するのはそれなりに自然なことだろう．したがって $\Delta = d\delta + \delta d$ という線形微分作用素が自然なものとして現れてくる．

しかし，定理 3.3 や系 3.5 の証明は上記の 2 つの例のように簡単ではない．何が難しさの原因なのだろうか．

例 3.7 と例 3.8 ではいずれも V^k を $W \oplus W^\perp$ という形に直交直和分解している（例 3.7 では $W = \operatorname{im} L$，例 3.8 では $W = \operatorname{im} \Delta$ について）．だが，無限次元の場合にはこの直交直和分解が無頓着には実行できない．安心して実行できるのは，(i) Hilbert 空間（完備計量ベクトル空間[†]）V において，(ii) その閉部分空間 W を用いて $V = W \oplus W^\perp$ と表すことである．われわれもそういう状況設定を行いたい．$\Omega^k(M)$ は L^2 内積 $(\cdot,\cdot)$ に関し完備ではないので，$\Omega^k(M)$ を完備化してえられる Hilbert 空間を議論の舞台とし，関数解析の手法を利用することになる．

例 3.9．Hilbert 空間 V において，W が閉部分空間でないと $V = W \oplus W^\perp$ とはならない．実例によってそれを観察しよう．数列のなす空間 $l^2_{\mathbb{R}}$ とその内積を

$$l^2_{\mathbb{R}} = \left\{ \{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \,\middle|\, \text{各 } a_m \text{ は実数で } \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m^2 < \infty \right\}, \qquad (\{a_m\}, \{b_m\}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m b_m$$

によって定める[‡]．$l^2_{\mathbb{R}}$ は Hilbert 空間である[§]．$l^2_{\mathbb{R}}$ の部分空間 W として次のものを考えてみる：

$$W = \{\{a_m\} \in l^2_{\mathbb{R}} \mid a_m \text{ は有限個を除いてすべて } 0\}.$$

すると $W^\perp = 0$ であり，$l^2_{\mathbb{R}} \supsetneq W \oplus W^\perp$ となってしまっている．

[*]ベクトル空間 V とその部分空間 W に対し，記号 $W^\perp$ で，W のすべての元と直交するようなベクトル全部からなる V の部分空間を表す．

[†]任意の Cauchy 列が収束するような計量ベクトル空間の意味．有限次元計量ベクトル空間はいつでも Hilbert 空間．

[‡]m の動く範囲は $\mathbb{Z}$ でなく $\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ としても実質的に同じだが，あとで Fourier 展開の文脈で用いることを見越して $\mathbb{Z}$ にした．同様に $l^2_{\mathbb{C}} = \left\{ \{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \,\middle|\, \text{各 } a_m \text{ は複素数で } \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^2 < \infty \right\}$ と定めておく．

[§]いろいろなところに書いてあると思うが，たとえば黒田成俊『関数解析』（共立出版，1980 年）の例 1.25 を見よ．

❖ Hodge ラプラシアンの局所表示

後のために，Hodge ラプラシアン Δ の局所表示が，Riemann 計量 g の局所座標表示にあらわれる関数 g_{ij} を用いてどのように表されるか，ざっくりと知っておきたい．

まず $\Omega^0(M)$ すなわち $C^\infty(M)$ に作用する $\Delta = \delta d$ を考えよう．命題 2.6 の証明（われわれは省略したが）に基づいて考えると，$\delta\colon \Omega^1(M) \to C^\infty(M)$ は各チャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ において

$$\omega = \sum_i \omega_i\, dx^i \quad \text{に対し} \quad \delta\omega = -\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \partial_i \left(\sqrt{G} \sum_j g^{ij} \omega_j \right)$$

のように局所表示されることがわかる（ただし行列値関数 (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) で表し，また $G = \det(g_{ij})$ と書いた．さらに $\partial/\partial x^i$ を ∂_i で表している）．ゆえに次が成立する．

命題 3.10. 関数に作用する Hodge ラプラシアン Δ は*，チャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ において

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \partial_i \left(\sqrt{G} \sum_j g^{ij} \partial_j f \right) \tag{3.6}$$

と局所表示される．

(3.6) を積の微分法を用いて整理すると，$\Delta f = -\sum_{i,j} g^{ij} \partial_i \partial_j f + (\text{低階項})$ の形になる．ただし「低階項」の部分は f と f の 1 階偏導関数を用いて表される．同様のことが一般にもいえる．

命題 3.11. $\Omega^k(M)$ に作用する Hodge ラプラシアン Δ は，チャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ において

$$(\Delta\omega)_{i_1 i_2 \cdots i_k} = -\sum_{i,j} g^{ij} \partial_i \partial_j \omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} + (\text{低階項}) \tag{3.7}$$

と局所表示される．ここで「低階項」の部分は $\omega_{i'_1 i'_2 \cdots i'_k}$ たちの 1 階以下の偏導関数で表される．

δ は原理的には計算できるものなので，命題 3.11 も地道にやれば確かめることが可能であろう．もっと効率よくやるには，Δ の「主シンボル」の計算をするのがよい†．

(3.7) は，かなり大雑把な形でではあるが，Riemann 計量 g_{ij} が $\mathbb{R}^n$ の Euclid 計量に“近い”とき，Δ は Euclid 空間の Hodge ラプラシアンに“近い”と考えられることを表している．

問題

問題 3.1. $\mathbb{R}$ において (3.1) が成立しないことを示す例を挙げよ．

問題 3.2. 次のような V，W の例を挙げよ．(i) V は完備でない計量ベクトル空間．(ii) W は V の閉部分空間．(iii) 直交直和分解 $V = W \oplus W^\perp$ は不成立．

問題 3.3. 命題 3.11 を $k = 1$ の場合について確かめよ．

---

*Riemann 多様体上の関数に作用する Δ は，普通はむしろ **Laplace–Beltrami 作用素**とよばれる．

†たとえば L. I. Nicolaescu, *Lectures on the Geometry of Manifolds*, 3rd ed., World Scientific, 2020 の 10.1 節を見よ．なぜか著者の Web サイトからダウンロードできる．`https://www3.nd.edu/~lnicolae/Lectures.pdf`