

2 微分形式に作用するラプラシアン

❖ ベクトル束

ベクトル束の定義はどこにでも書いてあるが、一応ここにも書いておく* (これから述べるのは C^∞ 級ベクトル束の定義だが、「 C^∞ 級」の文言は省略する。以後現れる他の諸概念についても同様とする)。ベクトル束 E とは、要するに M の点でパラメタづけられたベクトル空間の族 $\{E_p\}_{p \in M}$ のことである。ただし E_p たちが (ベクトル空間としての構造も含めて) “なめらかに” つながっていてほしい。その意味を明確にするために以下のように定義するのである。

定義. 多様体 M 上のベクトル束とは次の (i), (ii), (iii) をみたす多様体 E のことである。まず

- (i) 全射 C^∞ 級写像 $\pi: E \rightarrow M$ を備えている (この π を**射影**という)。
- (ii) 各点 $p \in M$ の逆像 $E_p = \pi^{-1}(p)$ は r 次元ベクトル空間の構造を備えている (各 E_p を**ファイバー**という)。ただし r は 0 以上の整数で、 p に依存しない。

さらに、一般に開集合 $U \subset M$ に対し $E|_U = \pi^{-1}(U)$ と書くことにしよう。射影 π を制限してえられる写像 $E|_U \rightarrow U$ を、誤解の生じる恐れがないかぎり同じ記号 π で表す。その上で第三の条件を述べる。

- (iii) 任意の $p \in M$ に対し、 p のある開近傍 U があって、 $\Phi: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ という微分同相写像 Φ が存在する。ただしここで、 Φ は

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^r \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

という図式を可換にしておき (ただし $U \times \mathbb{R}^r$ から各成分への射影を π_1, π_2 と書く)、さらに各 $q \in U$ について、 $\pi_2 \circ \Phi$ の E_q への制限はベクトル空間の同型写像 $E_q \cong \mathbb{R}^r$ を与えていなければならない。 (Φ をベクトル束 E の U における**(局所) 自明化**という。)

(ii) で現れた r は E の**階数 (ランク)** とよばれる。(iii) に関して、 E が U において自明化されるならば、 p のもっと小さな任意の開近傍 U' でも自明化されることに注意せよ。

開集合 $U \subset M$ の各点 p に対し E_p の元を一つ与えるような C^∞ 級写像 $s: U \rightarrow E|_U$ があるとき、これを U におけるベクトル束 E の**切断 (セクション)** とよぶ。定義域をとくに示さず単に「切断」といったら、 M 全体における切断のことを意味する。

*たとえば L. W. Tu 『トウー 多様体』(裳華房) の §12 をあわせて参照せよ。

注 2.1. M 上のベクトル束のもっとも基本的な例は直積 $E = M \times \mathbb{R}^r$ である. 射影 $\pi: E \rightarrow M$ としては第 1 成分への射影を採用し, 各ファイバー $E_p = \pi^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{R}^r$ を第 2 成分への射影により $\mathbb{R}^r$ と同一視する. このとき, $M \times \mathbb{R}^r$ の切断とはベクトル値関数 ($\mathbb{R}^r$ 値関数) のことに外ならない. つまり一般のベクトル束 E の切断とは, ベクトル値関数の一般化であって, 各点ごとに値が別々のベクトル空間 E_p に属することを許容した概念である.

$s \in \Gamma(E)$ に対し, 局所自明化 $\Phi: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ が一つ与えられると, $s|_U$ は $\tilde{s} = \pi_2 \circ \Phi \circ (s|_U)$ という U で定義された $\mathbb{R}^r$ 値 C^∞ 級関数と同一視できる. この $\tilde{s} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^r)$ を s の (Φ に関する) **局所表示** とよぶことにしよう. または, $\tilde{s}$ の各成分を $s^1, s^2, \dots, s^r$ と書いて, C^∞ 級関数の組 $\{s^a\}_{a=1}^r$ のことも局所表示ということにする.

例 2.2. 実のところ, われわれにはベクトル束の一般的定義はさほど重要でない. おさえるべきことは

$$E = \bigwedge^k T^*M = \coprod_{p \in M} \bigwedge^k T_p^*M$$

が M 上のベクトル束だ (**余接束の k 次の外積** などとよぶ) という事実だけである. なお射影 π の定義は明らかだろうが, 一応述べると, $v \in \bigwedge^k T_p^*M$ のとき $\pi(v) = p$ とする. ランクは $r = \binom{n}{k}$ である.

本来は $E = \bigwedge^k T^*M$ の C^∞ 級構造を記述する必要があるが, それは省いて次のことだけ述べておく. 任意の点 $p \in M$ に対し, p を含むチャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ をとり

$$\Phi: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^r, \quad \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} (dx^{i_1})_q \wedge (dx^{i_2})_q \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_q \mapsto (q, \{a_{i_1 i_2 \dots i_k}\}) \quad (2.1)$$

とおけばこれは E の局所自明化である ($\{a_{i_1 i_2 \dots i_k}\}$ を, $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ たちを並べてできる $\mathbb{R}^r$ の元と同一視する). E の切断とは微分 k 形式 ω のことといっても同じで, ω の局所自明化 (2.1) に関する局所表示とは, チャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ において $\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ と微分形式 ω を局所座標表示したときの係数として現れる関数 $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$ を並べた $\{\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}\}$ のことである.

注 2.3. 一般のベクトル束 E では, M の局所座標系 $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ が定義される開集合 U と E を局所自明化できる開集合 U には関係はない. チャートが与えられればそこで (2.1) のように局所自明化もできるのは, $E = \bigwedge^k T^*M$ の場合の特殊事情である.

ベクトル束 E の U における切断を全部集めてえられる $C^\infty(U)$ 加群を $\Gamma(U, E)$ と書くことにする (零元は自明な切断 $s: U \rightarrow E|_U$, $s(p) = 0_{E_p}$). $\Gamma(M, E)$ を単に $\Gamma(E)$ と書く.

❖ 線形微分作用素

E_1, E_2 を M 上のベクトル束とする (ランクを r_1, r_2 とする). また $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ としよう.

定義. 実線形写像 $D: \Gamma(E_1) \rightarrow \Gamma(E_2)$ が m 階 (**線形**) **微分作用素** であるとは, E_1, E_2 が両方とも自明化されるような任意のチャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ において, D が次のような表示をもつことをいう. ただし $s \in \Gamma(E)$ の像を Ds と書き表す ($D(s)$ ではなく).

与えられた $s \in \Gamma(E)$ の局所表示を $\tilde{s}$ とし, $Ds \in \Gamma(E')$ の局所表示を $\widetilde{Ds}$ とするとき,

$$\widetilde{Ds} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, |\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \tilde{s} \quad (2.2)$$

と表される．ただし $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ (多重指数) に対し

$$\partial^\alpha \tilde{s} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{\alpha_n} \tilde{s}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

また, 各 a_α は U で定義された $r_2 \times r_1$ 行列値 C^∞ 級関数で, 個別の $s \in \Gamma(E)$ に依存しない.

例 2.4. 外微分作用素 $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ が最も重要な例である. なお例 2.2 で触れたとおり, $\Omega^k(M)$ は $\bigwedge^k T^*M$ の切断の空間 $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ と同じものである.

話を単純にするため, 4 次元多様体 M における $d: \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^2(M)$ について考えよう. チャート $(U; x^1, x^2, x^3, x^4)$ があれば $\bigwedge^k T^*M$ は自明化され, $\omega \in \Omega^1(M)$ は $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3 + \omega_4 dx^4$ と局所表示される. すると

$$\begin{aligned} d\omega = & \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial \omega_4}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^4} \right) dx^1 \wedge dx^4 \\ & + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial \omega_4}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^4} \right) dx^2 \wedge dx^4 + \left(\frac{\partial \omega_4}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x^4} \right) dx^3 \wedge dx^4 \end{aligned} \quad (2.3)$$

である. (2.3) の右辺に現れた表示における各係数は, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ の 1 階偏導関数の $\mathbb{R}$ 係数線形結合 (よってとくに $C^\infty(U)$ 係数線形結合) だから, d は局所自明化を用いて (2.2) の形に表されたことになる. すなわち d は 1 階線形微分作用素. これは一般の n, k でも同じ.

❖ 外微分 d の形式的共役作用素 δ

ここからは, ただの多様体ではなく Riemann 多様体 (M, g) において議論を進める.

命題 2.5. $0 \leq k \leq n-1$ とする. そのとき, 1 階線形微分作用素 $\delta: \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ であって, 少なくとも一方がコンパクト台をもつような任意の $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$ について

$$(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta) \quad (2.4)$$

が成り立つものがただ一つ存在する.

M が向きづけられているときは, $(\cdot, \cdot)$ を微分形式の積分として表せることから, (2.4) をみたとす δ は比較的簡単に見出せる. 実際,

$$\begin{aligned} (d\omega, \eta) &= \int_M d\omega \wedge * \eta = \int_M \left(d(\omega \wedge * \eta) - (-1)^k \omega \wedge d(*\eta) \right) = (-1)^{k+1} \int_M \omega \wedge d(*\eta) \\ &= (-1)^{k+1+k(n-k)} \int_M \omega \wedge ** d(*\eta) = (-1)^{kn+1} \int_M \omega \wedge ** d(*\eta) \end{aligned}$$

だから, $\delta = (-1)^{kn+1} * d *$ と定めればよい (3 つ目の等号は Stokes の定理による. 4 つ目の等号で問題 2.1 の結論を用いた).

実際には多様体の向きは必要ない. さらに任意の線形微分作用素 $D: \Gamma(E_1) \rightarrow \Gamma(E_2)$ に関し, E_1, E_2 にファイバー計量が備わっていれば同じことができる. ファイバー計量の正確な定義は述べないが, 次の命題 2.6 を用いて命題 2.5 を復元するには, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{h_1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{h_2}$ と書いてあるところにそれぞれ $\bigwedge^k T^*M, \bigwedge^{k+1} T^*M$ の各ファイバーで定義された $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ をあてはめればよい.

命題 2.6. E_1, E_2 をベクトル束, h_1, h_2 を各々のファイバー計量とする. そのとき任意の m 階線形微分作用素 $D: \Gamma(E_1) \rightarrow \Gamma(E_2)$ に対して, m 階線形微分作用素 $D^*: \Gamma(E_2) \rightarrow \Gamma(E_1)$ であって, 少なくとも一方がコンパクト台をもつような任意の $s \in \Gamma(E_1), t \in \Gamma(E_2)$ について

$$\int_M \langle Ds, t \rangle_{h_2} dV_g = \int_M \langle s, D^*t \rangle_{h_1} dV_g \quad (2.5)$$

が成り立つものがただ一つ存在する.

命題 2.6 の証明は省略する. (2.5) は要するに幾何化された部分積分の公式であり, 証明も, D を局所表示して普通の部分積分を実行すればよいだけである*. D^* を D の**形式的共役作用素** または**形式的随伴作用素** (formal adjoint operator) という.

❖ Hodge ラプラシアン

δ を d の形式的随伴作用素とし, 微分形式に作用する作用素 Δ を

$$\Delta = d\delta + \delta d \quad (2.6)$$

により定義する (つまり $\omega \in \Omega^k(M)$ に対し $\Delta\omega = (d\delta + \delta d)\omega$. ただし $\Omega^n(M)$ 上で $d = 0$, $\Omega^0(M)$ 上で $\delta = 0$ と定めておく). Δ を **Hodge ラプラシアン** とよぶ. Δ は 2 階線形微分作用素で, さらに**形式的自己共役作用素**になっている (つまり Δ の形式的共役作用素は Δ 自身である).

注 2.7. $\Delta = -(d\delta + \delta d)$ と定義することもある. (2.6) のほうを**幾何学者のラプラシアン**, $\Delta = -(d\delta + \delta d)$ を**解析学者のラプラシアン**といって区別したりする.

問題

問題 2.1. 向きづけられた Riemann 多様体で, $*$: $\bigwedge^k T_p^*M \rightarrow \bigwedge^{n-k} T_p^*M$ および $*$: $\bigwedge^{n-k} T_p^*M \rightarrow \bigwedge^k T_p^*M$ を合成してえられる写像 $**$: $\bigwedge^k T_p^*M \rightarrow \bigwedge^k T_p^*M$ は $(-1)^{k(n-k)}$ 倍写像に等しいことを示せ.

問題 2.2. $\mathbb{R}$ に標準計量を与える. $\delta: \Omega^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ を $\delta(g dx) = -g'$ で定義する. δ が $d: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \Omega^1(\mathbb{R})$ の形式的共役作用素であることを示せ. また $\Delta: \Omega^k(\mathbb{R}) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{R})$ を $k = 0, 1$ に対し求めよ.

問題 2.3. $\mathbb{R}^3$ に標準計量を与える. $\Delta: \Omega^k(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{R}^3)$ をすべての k に対し具体的に書き下せ.

問題 2.4. Hodge ラプラシアンが形式的自己共役作用素であることを確かめよ.

問題 2.5. ベクトル束 E の開集合 U における切断 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ であって, 各点 $p \in U$ で $\xi_1(p), \xi_2(p), \dots, \xi_r(p)$ が E_p の基底になっているようなものを, U における E の**局所枠**という. ベクトル束 E の局所自明化 $\Phi: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ があれば, $\xi_a(p) = \Phi^{-1}(p, e_a)$ とおく (ただし e_a は $\mathbb{R}^r$ の第 a 基本ベクトル) ことで U における E の局所枠がえられる. 逆に, U における E の局所枠 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ が与えられれば, それに対応する U における E の局所自明化が存在することを示せ.

*しかしよい文献が見つからなかった. 簡単なことなので簡単そうに書いてあってほしい. とりあえず, 古田幹雄『指数定理』(岩波書店, 2008 年) p. 58 の記述を見た上で, 自分で考えてみるのがいいのではないかと感じた. あるいは, R. O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, 3rd ed., Springer, 2008 の Chapter IV の Proposition 2.8.