14　Euclid エンドをもつ多様体の場合 (2)

❖　$\tilde{\Delta}$ の左パラメトリクスの構成

閉多様体における Hodge ラプラシアンの左パラメトリクスの構成（第 10 回）と同様のアイデアに基づき，次のような $S_{m,\delta,\delta'}$ を構成できる．

定理 14.1. (M, g) を Euclid エンドをもつ Riemann 多様体とし，その次元 n は 3 以上とする．任意の非負整数 $m \geqq 0$ および $\delta < \delta'$ をみたす δ，$\delta' \in (-n/2, -2 + n/2)$ に対し，次の性質をもつ有界作用素

$$S_{m,\delta,\delta'} : W^m_{(k),\delta+2}(M) \to W^{m+2}_{(k),\delta}(M)$$

が存在する．

(i)　$S_{m,\delta,\delta'}$ は有界作用素 $\tilde{\Delta} : W^{m+2}_{(k),\delta}(M) \to W^m_{(k),\delta+2}(M)$ の左パラメトリクスになっている．すなわち，$S_{m,\delta,\delta'}\tilde{\Delta} = I - K_{m,\delta,\delta'}$ とおけば，$K_{m,\delta,\delta'} : W^{m+2}_{(k),\delta}(M) \to W^{m+2}_{(k),\delta}(M)$ はコンパクト作用素．

(ii)　さらに，$W^{m+2}_{(k),\delta}(M)$ の $K_{m,\delta,\delta'}$ による像は $W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ に含まれ，$K_{m,\delta,\delta'}$ を $W^{m+2}_{(k),\delta}(M)$ から $W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ への写像とみなしたものも有界作用素である．

(iii)　また，$W^{m+1}_{(k),\delta'+2}(M)$ の $S_{m,\delta,\delta'}$ による像は $W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ に含まれ，$S_{m,\delta,\delta'}$ を $W^{m+1}_{(k),\delta'+2}(M)$ から $W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ への写像とみなしたものも有界作用素である．

定理 9.7′（第 10 回）のときと同様，(ii) は (i) の主張を含むことを注意しておく．$K_{m,\delta,\delta'}$ は有界作用素 $W^{m+2}_{(k),\delta}(M) \to W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ と包含写像 $W^{m+3}_{(k),\delta'}(M) \hookrightarrow W^{m+2}_{(k),\delta}(M)$ の合成であり，後者は重みつき Rellich の補題（命題 13.7）によってコンパクト作用素だからである．

以下，本項では $S_{m,\delta,\delta'}$ の構成の仕方について述べる．第 10 回の記述と比較すること．

Euclid エンドをもつ Riemann 多様体 M は，相対コンパクトな開集合 U_0 と $U_\infty \approx \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R}$ の和集合になっている（$\approx$ は Riemann 計量を保つ微分同相の意）．U_0 の閉包 $\overline{U_0}$ がコンパクトだから，補題 10.1 と同様に，十分小さな $r > 0$ をとれば，任意の $p \in \overline{U_0}$ について正規座標系が $B_r(p)$ において定義される．さらに $r < \pi$ としておけば，各々の正規座標系 $B_r(p)$ から，$\mathbb{R}^n$ の開球 B_r に対応するトーラス T^n の開集合（第 10 回では W_r とかいた）への微分同相写像がえられる．$B_r(p)$ に台をもつ M 上の微分形式は，W_r に台をもつ T^n 上の微分形式とも思えることが重要な点だった．

$B_r(p)$ の正規座標系に関する g の局所座標表示 g_{ij} は，点 p において $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ をみたす．$h^{ij} = g^{ij} - \delta^{ij}$ とおけば，どんな $\varepsilon > 0$ が与えられたとしても，r を十分小さくとれば $B_r(p)$ 上で $|h^{ij}| < \varepsilon$ となる．詳しい説明は省くが，ε に対するそのような r は，$\overline{U_0}$ がコンパクトであることから，すべての点 $p \in \overline{U_0}$ について一様にとることができる．

さらに，補題 10.2 と同じ議論で次が証明できる*.

補題 14.2. 上記の条件をみたす任意の $r>0$ について，有限集合 $\{p_\lambda\}\subset\overline{U_0}$ を，次の 2 条件が成立するようにとることができる.

(i) $U_\lambda=B_r(p_\lambda)$ とおけば，$\{U_\lambda\}$ は $\overline{U_0}$ を覆う.

(ii) 任意の λ について，$U_\lambda\cap U_\mu\neq\emptyset$ をみたす μ の個数は N 以下である．ただし N は r によらない定数.

さて，$\varepsilon>0$（あとで決める）に対し，$r>0$ を十分に小さくとって，すべての点 $p\in\overline{U_0}$ について $B_r(p)$ 上で $|h^{ij}|<\varepsilon$ となるようにしておき，補題 14.2 で述べた $\overline{U_0}$ の有限部分集合 $\{p_\lambda\}$ をとる．$U_\lambda=B_r(p_\lambda)$ と定めれば，$\{U_\lambda\}\cup\{U_0\}$ は M の開被覆である.

M の開被覆 $\{U_\lambda\}\cup\{U_0\}$ に従属する 1 の分割を $\{\chi_\lambda^2\}\cup\{\chi_0^2\}$ という形でとり，$S'_{m,\delta}$ を

$$S'_{m,\delta}\eta=\sum_\lambda\chi_\lambda G(\chi_\lambda\eta)+\chi_\infty G_{\mathbb{R}^n}(\chi_\infty\eta) \tag{14.1}$$

で定義する．ただし G はトーラス T^n における Green 作用素で，$G_{\mathbb{R}^n}$ は定理 13.9 で G とかいた $\tilde{\Delta}$ の逆作用素 $W^m_{\delta+2}(\mathbb{R}^n)\to W^{m+2}_\delta(\mathbb{R}^n)$ を（正確には，U_∞ に台をもつ微分形式を $\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_R}$ に台をもつ微分形式とみて座標表示し，そのときあらわれる各係数関数に定理 13.9 の G を施す作用素を）あらわしている．定義からわかるように，$S'_{m,\delta}$ は有界作用素 $W^m_{(k),\delta+2}(M)\to W^{m+2}_{(k),\delta}(M)$ を与える.

(14.1) によると，$\omega\in W^{m+2}_{(k),\delta}(M)$ に対し

$$\begin{aligned}
S'_{m,\delta}\tilde{\Delta}\omega&=\sum_\lambda\chi_\lambda G(\chi_\lambda\tilde{\Delta}\omega)+\chi_\infty G_{\mathbb{R}^n}(\chi_\infty\tilde{\Delta}\omega)\\
&=\sum_\lambda\chi_\lambda G(\tilde{\Delta}(\chi_\lambda\omega))+\chi_\infty G_{\mathbb{R}^n}(\tilde{\Delta}(\chi_\infty\omega))\\
&\qquad+\sum_\lambda\chi_\lambda G(\text{低階かつ台が } U_\lambda \text{ に含まれる項})\\
&\qquad+\chi_\infty G_{\mathbb{R}^n}(\text{低階かつ台が } U_0\cap U_\infty \text{ に含まれる項})
\end{aligned}$$

である．U_∞ においては $G_{\mathbb{R}^n}\tilde{\Delta}$ は恒等作用素だから，$\tilde{\Delta}_0$ を T^n の Hodge ラプラシアンとすれば

$$\begin{aligned}
S'_{m,\delta}\tilde{\Delta}\omega&=\sum_\lambda\chi_\lambda G(\tilde{\Delta}_0(\chi_\lambda\omega))+\sum_\lambda\chi_\lambda G((\tilde{\Delta}-\tilde{\Delta}_0)(\chi_\lambda\omega))+\chi_\infty^2\omega\\
&\qquad+\sum_\lambda\chi_\lambda G(\text{低階かつ台が } U_\lambda \text{ に含まれる項})\\
&\qquad+\chi_\infty G_{\mathbb{R}^n}(\text{低階かつ台が } U_0\cap U_\infty \text{ に含まれる項})
\end{aligned}$$

*ただし (ii) の条件は補題 10.2 に書いたものよりも強くしました．補題 10.2 も同様に修正する必要があるようです．すみません.

という状況であり，これを第 10 回と同様の仕方で整理することにより

$$S'_{m,\delta}\tilde{\Delta}\omega = \omega + Q\omega + T\omega \tag{14.2}$$

とできる．ただし Q は有界作用素 $W^{m+2}_{(k),\delta}(M) \to W^{m+2}_{(k),\delta}(M)$ であって $\|Q\omega\|_{m+2,\delta} \leqq (1/2)\|\omega\|_{m+2,\delta}$ をみたし（まだ決めていなかった $\varepsilon > 0$ は，この評価式が実現されるように十分小さく定めておく），T は任意の $\delta' \in (\delta, -2+n/2)$ について有界作用素 $W^{m+2}_{(k),\delta}(M) \to W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ を定める．Q の作用素ノルムが $1/2$ 以下となったので，逆作用素 $(I+Q)^{-1}$：$W^{m+2}_{(k),\delta}(M) \to W^{m+2}_{(k),\delta}(M)$ が定義され，有界である．

いま行った Q の作用素ノルムの評価は，任意に $\delta' \in (\delta, -2+n/2)$ をとって固定したとき，$W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ においても同時に成り立つようにすることができる（そうなるように定めた $S'_{m,\delta}$ を $S'_{m,\delta,\delta'}$ であらわす）．このとき先ほどの $(I+Q)^{-1}$ は $W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ を $W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ の中に写し，写像 $W^{m+3}_{(k),\delta'}(M) \to W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ としても有界作用素となる．

そうしておいて $(I+Q)^{-1}$ を (14.2) の両辺に左から掛ければ

$$(I+Q)^{-1}S'_{m,\delta,\delta'}\tilde{\Delta}\omega = \omega + (I+Q)^{-1}T\omega$$

である．$S_{m,\delta,\delta'} = (I+Q)^{-1}S'_{m,\delta,\delta'}$ とおけば，定理 14.1 の条件は (iii) を除いて成立していることが確かめられる．

さらにもう一度 (14.1) を振り返る．$G_{\mathbb{R}^n}$ は $W^{m+1}_{(k),\delta'+2}(\mathbb{R}^n) \to W^{m+3}_{(k),\delta'}(\mathbb{R}^n)$ という作用素としても有界なので，$S'_{m,\delta,\delta'}$ は $W^{m+1}_{(k),\delta'+2}(M) \to W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ という有界作用素でもある．したがって，たったいま定義した $S_{m,\delta,\delta'} = (I+Q)^{-1}S'_{m,\delta,\delta'}$ は，$S'_{m,\delta,\delta'}$ と同じく $W^{m+1}_{(k),\delta'+2}(M) \to W^{m+3}_{(k),\delta'}(M)$ という有界作用素をも定めていることになる．これで定理 14.1 の証明が完結した．

定理 9.7′ から命題 11.2 がえられたのとまったく同様に，定理 14.1 からは次の結果がえられる．

系 14.3. $m \geqq 0$ を非負整数とし，δ，$\delta' \in (-n/2, -2+n/2)$ は $\delta < \delta'$ をみたすとする．そのとき，$\omega \in W^2_{(k),\delta}(M)$，$\tilde{\Delta}\omega \in W^m_{(k),\delta'+2}(M)$ ならば $\omega \in W^{m+2}_{(k),\delta'}(M)$ である．

これは命題 13.5 の改善版といえる（$\omega \in L^2_{(k),\delta}(M)$ ではなく $\omega \in W^2_{(k),\delta}(M)$ という仮定をつけてはいるが，それは些細なことで，重みを δ から δ' に改善できるのがポイント）．さらに定理 11.5 のようにして評価式を導出することも可能である．

❖ 定理 13.2 の証明

前回述べた結果の証明を与えよう．

定理 13.2. (M,g) を Euclid エンドをもつ Riemann 多様体とし，その次元 n は 3 以上とする．

(1) 各 k に対し，L^2 調和形式の空間 $\mathcal{H}^k_{(2)} = \{\omega \in \Omega^k_{(2)}(M) \mid \Delta\omega = 0\}$ は有限次元.

(2) 任意の $\omega \in \mathcal{H}^k_{(2)}$ に対し，$|x| \to +\infty$ のとき，任意の $\varepsilon > 0$ について $|\omega| = O(|x|^{2-n+\varepsilon})$.

はじめる前に一言．命題 13.5 から $\mathcal{H}^k_{(2)} \subset W^m_{(k),0}(M)$（任意の m について）はすぐにわかる．すると命題 13.6 によって $\omega \in \mathcal{H}^k_{(2)}$ ならば $|\omega| = O(\rho^{-n/2}) = O(|x|^{-n/2})$ であって，これは $n = 3$, 4 のとき，(2) の主張よりも強い．そこで (2) は $n \geqq 5$ のときだけ証明すればよい．

［証明］(1)　$\tilde{\Delta} \colon W^{m+2}_{(k),\delta}(M) \to W^m_{(k),\delta+2}(M)$ のことを $\tilde{\Delta}_{m,\delta}$ とかこう．$\delta \in (-n/2, -2 + n/2)$ としておけば，定理 14.1 と命題 9.1 によって $\ker \tilde{\Delta}_{m,\delta}$ は有限次元である．さらに，系 14.3 から $\ker \tilde{\Delta}_{m,\delta}$ は m，δ に依存しないこともわかる．

ところで任意の m について $\mathcal{H}^k_{(2)} \subset W^m_{(k),0}(M)$ だった．とくに $\mathcal{H}^k_{(2)} \subset \ker \tilde{\Delta}_{0,0}$ である．$n \geqq 5$ のときは $0 \in (-n/2, -2 + n/2)$ であることから $\ker \tilde{\Delta}_{0,0}$ は有限次元で，$\mathcal{H}^k_{(2)}$ も有限次元.

$n = 3$，4 のときも，$\delta \in (-n/2, -2 + n/2)$ をなんでもよいので一つ定めれば $\delta < 0$ なので $\mathcal{H}^k_{(2)} \subset \ker \tilde{\Delta}_{0,0} \subset \ker \tilde{\Delta}_{0,\delta}$ であり，$\ker \tilde{\Delta}_{0,\delta}$ が有限次元であることから $\mathcal{H}^k_{(2)}$ も有限次元.

(2)　$\omega \in \mathcal{H}^k_{(2)}$ とすれば，(1) の証明でみたことから，任意の m と $\delta \in (-n/2, -2 + n/2)$ に対し $\omega \in W^m_{(k),\delta}(M)$ である．したがって任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\omega \in W^{m+2}_{(k),-2+n/2-\varepsilon}$ である．命題 13.6 によって $|\omega| = O(|x|^{2-n+\varepsilon})$.　□

なお $\ker \tilde{\Delta}_{m,\delta}$ は m および $\delta \in (-n/2, -2 + n/2)$ に依存しないことに (1) の証明でふれたが，$n \geqq 5$ のときは，この $\ker \tilde{\Delta}_{m,\delta}$ とは $\mathcal{H}^k_{(2)}$ そのものである．実際，$\mathcal{H}^k_{(2)} \subset \ker \tilde{\Delta}_{0,0}$ はすでに指摘した．逆に $\omega \in \ker \tilde{\Delta}_{0,0} = \bigcap_{m \geqq 0, \delta \in (-n/2, -2+n/2)} \ker \tilde{\Delta}_{m,\delta}$ であるならば，命題 13.6 より ω は C^∞ 級で任意の $\varepsilon > 0$ に対し $|\omega| = O(|x|^{2-n+\varepsilon})$．そのような ω は二乗可積分である（極座標を用いて $|\omega|^2$ を積分してみよ）.