

13 Euclid エンドをもつ多様体の場合 (1)

❖ 定義と目標

閉 Riemann 多様体上の Hodge ラプラシアンに対するパラメトリクス構成 (第 9 回・第 10 回) の発想が, ある種の非コンパクト完備 Riemann 多様体にも通用することを示したい. そのもっとも単純な例として, 残る 2 回の講義では Euclid 空間的なエンド (端) をもつ Riemann 多様体を扱う.

定義. Riemann 多様体 (M, g) が次の条件をみたす開被覆 $\{U_0, U_\infty\}$ をもつとき, (M, g) は **Euclid エンドをもつ** ということにする*.

- (i) U_0 は M で相対コンパクトである.
- (ii) ある $R > 0$ と微分同相写像 $\Phi: U_\infty \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R}$ が存在し, Φ は Riemann 計量も保つ.
- (iii) ある $R' > R$ が存在し, $\Phi(U_0 \cap U_\infty) = B_{R'} \setminus \overline{B_R}$.

ただし $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$ である. Φ を通じて, U_∞ を $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R}$ と同一視する.

Euclid エンドをもつ Riemann 多様体 (M, g) は完備である. $M \setminus U_0$ ($\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{R'}}$ と同一視) では $|x|$ に一致するような関数 $f \in C^\infty(M)$ をとれば, f は皆既関数で, $|df|$ は有界だからである.

注 13.1. (M, g) のエンドが $\mathbb{R}^n$ のそれと完全に一致しているという設定ではなく, もう少し緩い条件である漸近平坦性 (asymptotically flatness, 漸近的 Euclid 性といってもよい) を課すことにしても, 以下の議論はたいして変わらない. 漸近平坦性は一般相対論における Einstein 方程式の Cauchy 初期値問題の文脈で大切な概念である. 関連する最近の日本語の文献として, 酒井隆, 小林治, 芥川和雄, 西川青季, 小林亮一『幾何解析』(朝倉書店, 2018 年) の第 2 章や, 山田澄生『相対論とリーマン幾何学』(共立出版, 2023 年) がある.

Euclid エンドをもつ Riemann 多様体 (M, g) において, 適切な Sobolev 空間およびそのあいだの作用素とみなした Hodge ラプラシアン $\tilde{\Delta}$ を導入し, $\tilde{\Delta}$ の精密な左パラメトリクスを構成することにしよう. そのことを通じて以下のことがらを証明するのがわれわれの目標である.

定理 13.2. (M, g) を Euclid エンドをもつ Riemann 多様体とし, その次元 n は 3 以上とする.

- (1) 各 k に対し, L^2 調和形式の空間 $\mathcal{H}_{(2)}^k = \{\omega \in \Omega_{(2)}^k(M) \mid \Delta\omega = 0\}$ は有限次元.
- (2) 任意の $\omega \in \mathcal{H}_{(2)}^k$ に対し, $|x| \rightarrow +\infty$ のとき, 任意の $\varepsilon > 0$ について $|\omega| = O(|x|^{2-n+\varepsilon})$.

定理 13.2 の (1) は Choquet-Bruhat–Christodoulou による. (2) は Bartnik[†] に帰してよいと思う.

*Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou, Elliptic systems in $H_{s,\delta}$ spaces on manifolds which are Euclidean at infinity, *Acta Math.* **145** (1981), 129–150 では「Euclidean at infinity である」とよばれている条件. なおエンドの数は複数個でも以下の話には影響しない (有限個であれば).

[†]R. Bartnik, The mass of an asymptotically flat manifold, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), 661–693.

❖ Euclid 空間の Newton ポテンシャル

上記の計画を実行するために, Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の微分形式に作用する Hodge ラプラシアン の性質をよく知る必要がある. この場合, Hodge ラプラシアン の作用は $\omega = \sum f_I dx^I$ に対し $\Delta\omega = \sum (\Delta f_I) dx^I$ で与えられるから, 関数に作用するラプラシアンを理解すれば十分である.

$\mathbb{R}^n$ においては, コンパクト台をもつ関数 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し, Newton ポテンシャルを用いて $\Delta u = f$ の解 u を構成できることがよく知られている.

定義. $n \geq 2$ のとき, $\mathbb{R}^n$ において,

$$N(x) = \frac{1}{(n-2)\text{Vol}(S^{n-1})} |x|^{2-n} \quad (n \geq 3), \quad N(x) = -\frac{1}{2\pi} \log|x| \quad (n=2)$$

とおく. $N(x)$ を **Newton ポテンシャル** という*.

$N(x)$ は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ において $\Delta N = 0$ をみたす. また N は局所可積分であり, そのことから任意の $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し次の積分 (13.1) が定義される.

命題 13.3. $n \geq 2$ とする. $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$u(x) = (N * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y)f(y) dy \quad (13.1)$$

とおけば (dy は $dy^1 dy^2 \cdots dy^n$ の意味), $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ かつ $\Delta u = f$ である.

命題 13.3 の証明はさまざまなテキストで見つかると思う†.

(13.1) から直ちにわかることだが, $n \geq 3$ のとき, $|x| \rightarrow +\infty$ において $u = O(|x|^{2-n})$ であり, またその任意階の偏導関数についても

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_m} f = O(|x|^{2-n-m}) \quad (13.2)$$

という減衰度評価がみたされる. $n=2$ のときも類似の評価 (今度は増大度評価というべきだろう) がえられるが, 話を単純にするために, 以下では $n \geq 3$ と仮定する.

❖ 重みつき Sobolev 空間

$\mathbb{R}^n$ において $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$ とおく. 任意の $\delta \in \mathbb{R}$ に対し, $L_\delta^2(\mathbb{R}^n) = \rho^{-\delta} L^2(\mathbb{R}^n)$ と定める.

$$\|f\|_{L_\delta^2} := \|\rho^\delta f\|_{L^2}$$

と定めれば, $L_\delta^2(\mathbb{R}^n)$ は $\|f\|_{L_\delta^2}$ をノルムとする Hilbert 空間である. パラメタ $\delta \in \mathbb{R}$ は “ L_δ^2 の元の遠方における減衰の強さ” をあらわしている‡.

* $n=3$ のとき, 原点に質点がおかれているときの万有引力のポテンシャル (単位質量あたりの位置エネルギーを与える関数) は $|x|^{-1}$ に比例することに注意せよ.

†たとえば L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd Ed., American Mathematical Society, 2010 の 23 ページ.

‡Choquet-Bruhat–Christodoulou の流儀 (というより, もとは M. Cantor, *Spaces of functions with asymptotic conditions on $\mathbb{R}^n$* , *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1975), 897–902 の流儀) を採用した. Bartnik の重みパラメタを β とおけば, 両者の関係は $\beta = -\delta - n/2$ である. Bartnik の記法は命題 13.6 を意識したもの.

より一般に、非負整数 $m \geq 0$ と $\delta \in \mathbb{R}$ に対して次のように定める。ただし、 $\mathbb{R}^n$ 上の局所可積分関数 f であって「 $\mathbb{R}^n$ の任意の点 p に対し、 p を含むあるチャート U において $f|_U \in W^m(U)$ である」という性質をもつものの全体を $W_{\text{loc}}^m(M)$ とする。

定義. (1) $\mathbb{R}^n$ における**重みつき Sobolev 空間** $W_\delta^m(\mathbb{R}^n)$ とは、 $f \in W_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n)$ であって

$$\|f\|_{m,\delta}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\rho^\delta f|^2 + \sum_{i=1}^n |\rho^{\delta+1} \tilde{\partial}_i f|^2 + \cdots + \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n |\rho^{\delta+m} \tilde{\partial}_{i_1} \cdots \tilde{\partial}_{i_m} f|^2 \right) dV_g < +\infty \quad (13.3)$$

をみたすようなものすべてからなる、 $\|\cdot\|_{m,\delta}$ をノルムとする Hilbert 空間である。座標表示に関する各係数が $W_\delta^m(\mathbb{R}^n)$ に属するような微分形式の全体を $W_{(k),\delta}^m(\mathbb{R}^n)$ であらわす。

(2) Euclid エンドをもつ Riemann 多様体 (M, g) において、 $W_{(k),\delta}^m(M)$ とは、 $\omega \in W_{(k),\text{loc}}^m(M)$ であって、開被覆 $\{U_0, U_\infty\}$ に従属する 1 の分割 $\{\psi_0, \psi_\infty\}$ をとれば $\psi_\infty \omega \in W_{(k),\delta}^m$ であるようなもの全体からなる Hilbert 空間である。ノルム $\|\cdot\|_{m,\delta}$ は $\|\omega\|_{m,\delta}^2 = \|\psi_0 \omega\|_m^2 + \|\psi_\infty \omega\|_{m,\delta}^2$ によって定義する（第 2 項の $\|\psi_\infty \omega\|_{m,\delta}$ は $W_{(k),\delta}^m(\mathbb{R}^n)$ におけるノルム）。

定義から明らかに、 $f \in W_\delta^m(\mathbb{R}^n)$ に対し $\tilde{\partial}_i f \in W_{\delta+1}^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ である。したがって $\tilde{\Delta} = -\sum \tilde{\partial}_i^2$ が有界作用素 $W_\delta^{m+2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W_{\delta+2}^m(\mathbb{R}^n)$ を定義する。これは一般の Euclid エンドをもつ Riemann 多様体 (M, g) でも同じことで、 $\tilde{\Delta}$ は有界作用素 $W_\delta^{m+2}(M) \rightarrow W_{\delta+2}^m(M)$ を定める。

先ほどの観察 (13.2) によって、 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し、任意の $m \geq 0$ および任意の $\delta < -2 + n/2$ について $N * f \in W_\delta^m(\mathbb{R}^n)$ である。これは W_δ^m の定義の動機の一つといえよう。さらに、 R 倍写像に関して $\|\cdot\|_{m,\delta}$ が次のように振る舞うのは重要な点である（これを利用した「スケーリングの手法」によって局所楕円型評価をすぐさま大域化することができる）。

補題 13.4 (Bartnik). $R \geq 1$, $u \in W_\delta^m(A_R)$ とする（ただし $A_R = B_{2R} \setminus \overline{B_R} \subset \mathbb{R}^n$ とおく。 $W_\delta^m(A_R)$ の意味は明らかであろう。ノルム $\|\cdot\|_{m,\delta,A_R}$ は (13.3) を A_R における積分でおきかえてえられる）。そのとき、 $u_R(x) = u(Rx)$ とおけば $u_R \in W_\delta^m(A_1)$ で、 u および R によらない定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して

$$C_1 R^{\delta+n/2} \|u_R\|_{m,\delta,A_1} \leq \|u\|_{m,\delta,A_R} \leq C_2 R^{\delta+n/2} \|u_R\|_{m,\delta,A_1}$$

が成り立つ。（このことをさして $\|u\|_{m,\delta,A_R} \approx R^{\delta+n/2} \|u_R\|_{m,\delta,A_1}$ とかく。）

[証明] $1 < |x| < 2$ において $\rho(Rx) \approx R\rho(x)$ である。このことから、 $0 \leq l \leq m$ について $|\rho(Rx)^{\delta+l} (\tilde{\partial}^l u)(Rx)| = R^{-l} |\rho(Rx)^{\delta+l} (\tilde{\partial}^l u_R)(x)| \approx R^\delta |\rho(x)^{\delta+l} (\tilde{\partial}^l u_R)(x)|$ 。したがって

$$\int_{A_R} |\rho(x)^{\delta+l} (\tilde{\partial}^l u)(x)|^2 dx \approx R^{2\delta+n} \int_{A_1} |\rho(x)^{\delta+l} (\tilde{\partial}^l u_R)(x)|^2 dx.$$

これを $0 \leq l \leq m$ について加えあわせて $\|u\|_{m,\delta,A_R}^2 \approx R^{2\delta+n} \|u_R\|_{m,\delta,A_1}^2$ を得る。 $\square$

補題 13.4 と $A_1 = B_2 \setminus \overline{B_1} \subset \mathbb{R}^n$ における局所楕円型評価、および $U_0 \subset M$ における局所楕円型評価をあわせて次の結論を得る。

命題 13.5. (M, g) を Euclid エンドをもつ Riemann 多様体とする. そのとき, $\omega \in L^2_{(k), \delta}(M)$ かつ $\tilde{\Delta}\omega \in W^m_{(k), \delta+2}(M)$ ならば $\omega \in W^{m+2}_{(k), \delta}(M)$ である. さらに, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|\omega\|_{m+2, \delta} \leq C(\|\tilde{\Delta}\omega\|_{m, \delta+2} + \|\omega\|_{0, \delta})$$

がなりたつ.

さらに, 閉多様体の Sobolev 空間の場合と同様に, 二つの重要な補題が成立する*.

命題 13.6(重みつき Sobolev の補題). すべての $m \geq 0$ について $f \in W^m_{\delta}(M)$ ならば, f は C^∞ 級で, さらに $|x| \rightarrow +\infty$ のとき $f = O(\rho^{-\delta-n/2})$.

命題 13.7(重みつき Rellich の補題). $m > m'$ かつ $\delta > \delta'$ のとき, 包含写像 $W^m_{\delta}(M) \hookrightarrow W^{m'}_{\delta'}(M)$ はコンパクト作用素である.

注 13.8. 仮定 $\delta > \delta'$ は重要である. $\delta = \delta'$ のときは上記の結論はなりたたない. 実際, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\text{supp } \psi \subset A_1$ をみたす恒等的に 0 でない関数とし, $j = 1, 2, \dots$ に対し $\psi_j(x) = j^{-\delta-n/2}\psi(x/j)$ とする. 補題 13.4 によると $\|\psi_j\|_{m, \delta} \approx \|\psi\|_{m, \delta}$ なので, $\{\psi_j\}$ は $W^m_{\delta}(\mathbb{R}^n)$ の有界列である. これがもし $W^{m'}_{\delta'}(\mathbb{R}^n)$ で収束する部分列をもつならば, $\text{supp } \psi_j$ が「無限遠方に逃げていく」ことから, その極限は 0 でなければならない. しかし $\|\psi_j\|_{m', \delta} \approx \|\psi\|_{m', \delta}$ なので, そのようなことはない.

❖ Euclid 空間において $\tilde{\Delta}$ の定める可逆作用素

命題 13.5 は重要な評価式ではあるが, われわれにとっては予備的結果にすぎない. 第 9 回・第 10 回で行ったのと類似の考察によってえられる精密な $\tilde{\Delta}$ の左パラメトリクスは, ある限定された範囲に属する δ については, よりよい大域楕円型評価をもたらす.

先ほど, すべての $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ に対し, 任意の $m \geq 0$ および任意の $\delta < -2 + n/2$ について $N * f \in W^m_{\delta}(\mathbb{R}^n)$ であることを述べた. 実は, δ の動く範囲をもう少し制限すれば, $f \mapsto N * f$ は有界作用素 $G: W^{m+2}_{\delta+2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^m_{\delta}(\mathbb{R}^n)$ に拡張することができる.

定理 13.9. $\delta \in (-n/2, -2 + n/2)$ に対し, $\tilde{\Delta}: W^{m+2}_{\delta+2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^m_{\delta}(\mathbb{R}^n)$ は可逆であり, 上記の G がその逆作用素を与える.

[証明] $m = 0$ のときは McOwen による[†]. それと命題 13.5 より一般の m の場合も正しい. $\square$

この G を利用して, 一般の Euclid エンドをもつ (M, g) で左パラメトリクスを構成する.

問題

問題 13.1. Riemann 多様体 (M, g) が Euclid エンドをもつためには, (M, g) が完備であって, コンパクト集合 $K \subset M$ が存在し, ある $R > 0$ について, Riemann 計量を保つ微分同相写像 $\Phi: M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R}$ がとれることが必要十分であることを示せ.(これがよく目にする定義.)

*それぞれ, 前掲の Bartnik の論文の Theorem 1.2 (iv) と, Choquet-Burhat-Christdoulou の論文の Lemma 2.1.

[†]R. C. McOwen, The behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces, *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979), 783–795.