12　完備 Riemann 多様体の L^2 コホモロジー

❖　完備 Riemann 多様体

非コンパクト Riemann 多様体のうちで，「完備性」の条件をみたすものは，比較的よい性質をもつものと受けとめられている．この「完備性」にはいくつかの表現があるので紹介する．以下では，単に Riemann 多様体 (M, g) といったら，連結性をつねに仮定する．

まず，(M, g) に自然に定まる距離 d_g について簡単に説明しておく．C^∞ 級の**パス**（path，道）とは C^∞ 級写像 $\gamma\colon [a, b] \to M$ のことであり，その**長さ**は $\displaystyle\int_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt$ で定義される（ただし $|\dot\gamma(t)|$ は $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$ の g に関するノルム）．p，$q \in M$ に対し，p を始点，q を終点とする C^∞ 級パスの長さの下限を $d_g(p, q)$ とすれば，d_g は M における距離になる．

定理 12.1 (Hopf–Rinow の定理)**.** Riemann 多様体 (M, g) について次の条件は同値である．

(i)　任意の $p \in M$，$v \in T_pM$ について，始点 p，初速 v の測地線 $\gamma(t)$ は $t \in (-\infty, \infty)$ に対して定義される（**測地完備性**）．

(ii)　(M, g) は距離 d_g に関して距離空間として完備である（**距離完備性**）．

(iii)　任意の $p \in M$ および $r > 0$ について，距離 d_g に関する点 p を中心とする半径 r の開球 $B_r(p) = \{\, q \in M \mid d_g(p, q) < r \,\}$ は，M において相対コンパクトである．

(iv)　M の皆既関数*（exhaustion function）$f \in C^\infty(M)$ であって，$|df|$ が有界であるようなものが存在する．

定理 12.1 の条件をみたす Riemann 多様体 (M, g) は**完備**であるという．

注 12.2．定理 12.1 において (iv) が他と同値な条件であることを述べた文献はあまりみないが，J.-P. Demailly のレクチャーノート *Complex Analytic and Differential Geometry*† 第 VIII 章の (2.4) Lemma で言及されている．条件をみたす皆既関数 f は，点 $p_0 \in M$ を任意に定めて $f_0(p) = d_g(p_0, p)$ と定義し，f_0 を Friedrichs の軟化子で mollify することによってえられる．

❖　いくつかのコホモロジー

コンパクトとはかぎらない Riemann 多様体 (M, g) において微分形式により定義される，いくつかのコホモロジーについて議論する．本項では (M, g) は完備でなくてもよい．

通常の（de Rham）コホモロジーは，$d_k\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ を用いて $H^k(M) = \ker d_k / \operatorname{im} d_{k-1}$ で定義される．コンパクト台微分形式に作用する外微分作用素を $d_{k,c}\colon \Omega^k_c(M) \to \Omega^{k+1}_c(M)$ であらわすことにして，**コンパクト台をもつコホモロジー**を $H^k_c(M) = \ker d_{k,c} / \operatorname{im} d_{k-1,c}$ によって定

*任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $M_c = \{\, p \in M \mid f(p) < c \,\}$ が M において相対コンパクトであるような関数 f のこと．

†`https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf`.

義する．$H^k(M)$，$H^k_c(M)$ は Riemann 計量 g とは無関係で，M の可微分多様体としての構造のみに依存する（さらに，実際には位相空間としての構造のみによって決まる）．

例 12.3．$M=\mathbb{R}$ のときを考えると，まず $H^0(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$，$H^1(\mathbb{R})=0$ である．このことは $\mathbb{R}$ の可縮性からもわかるが，以下のような直接的な考察によってもよい．$H^0(\mathbb{R})$ は（局所）定数関数すべての集まりだから $H^0(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$ である．$H^1(\mathbb{R})$ については，任意の $\omega=g\,dx$ が $\ker d_1$ に属するが，ここで f を g の任意の原始関数とすれば $df=g\,dx$ なので，$g\,dx\in\operatorname{im}d_0$ でもある．ゆえに $H^1(\mathbb{R})=0$.

コンパクト台をもつコホモロジーについては Poincaré 双対性から $H^0_c(\mathbb{R})=0$，$H^1_c(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$ がわかるが，こちらも直接的に考えてみよう．$H^0_c(\mathbb{R})$ はコンパクト台をもつ定数関数すべての集まりで，$\mathbb{R}$ は非コンパクトだからそのような関数は定数関数 0 しかない．ゆえに $H^0_c(\mathbb{R})=0$．$H^1_c(\mathbb{R})$ については，任意の $\omega=g\,dx$，$g\in C^\infty_c(\mathbb{R})$ は $\ker d_{1,c}$ の元だが，ここで $f\in C^\infty_c(\mathbb{R})$ が $df=g\,dx$ をみたすならば，$f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x g(t)\,dt$ でなければならない．実際に $f\in C^\infty_c(\mathbb{R})$ となる（いいかえると $\omega=g\,dx\in\operatorname{im}d_{0,c}$ となる）ためには $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty g(t)\,dt=0$ が必要十分．同型写像 $H^1_c(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$ が $[g\,dx]\longmapsto\displaystyle\int_{-\infty}^\infty g(t)\,dt$ により与えられる．

つぎに $\Omega^k_{(2)}(M)=\Omega^k(M)\cap L^2_{(k)}(M)$ とおき，$d_{k,(2)}$ を，$L^2_{(k)}(M)$ から $L^2_{(k+1)}(M)$ への非有界作用素として

$$\operatorname{dom}d_{k,(2)}=\{\omega\in\Omega^k_{(2)}\mid d\omega\in\Omega^{k+1}_{(2)}\},\qquad \omega\in\operatorname{dom}d_{k,(2)}\text{ に対し }d_{k,(2)}\omega=d\omega \tag{12.1}$$

によって定める．(M,g) の L^2 **コホモロジー**を

$$H^k_{(2)}(M)=\ker d_{k,(2)}/\operatorname{im}d_{k-1,(2)}$$

で定義する．また $d_{k,(2)}$ の最小閉拡張 $\overline{d_{k,(2)}}$ をとって

$$H^k_{(2),\sharp}(M)=\ker\overline{d_{k,(2)}}/\operatorname{im}\overline{d_{k-1,(2)}} \tag{12.2}$$

とおこう（問題 12.1 に注意）．このとき自然な写像 $i_\sharp\colon H^k_{(2)}(M)\to H^k_{(2),\sharp}(M)$ があるが，Cheeger の結果によるとこれはいつでも線形同型写像である*．したがって，(12.2) は L^2 コホモロジー $H^k_{(2)}(M)$ の別の（等価な）定義を与えているのだと思ってもよい．

例 12.4．(M,g) を $\mathbb{R}$ に標準計量を与えたものとする．$H^0_{(2)}(\mathbb{R})$ はすぐにわかるように 0 である．

$H^1_{(2)}(\mathbb{R})$ は無限次元の線形空間であることを証明しよう†．そのためには $\ker\overline{d_{1,(2)}}$ が $L^2_{(1)}(\mathbb{R})$ において閉部分空間ではないことを確かめれば十分である．実際，もし $H^1_{(2)}(\mathbb{R})$ が有限次元ならば，$\ker\overline{d_{1,(2)}}$ は必然的に閉部分空間となる（問題 12.2 の結果を $V_1=L^2(\mathbb{R})$，$V_2=\ker\overline{d_{1,(2)}}$，$T=\overline{d_{0,(2)}}$ に適用する）．

$g(x)$ を $|x|\geqq 1$ では $1/x$ に一致するような C^∞ 級関数とする．$\omega=g\,dx$ は $\Omega^1_{(2)}(\mathbb{R})$ の元であり，$\ker d_{1,(2)}$ に属する（したがって $\ker\overline{d_{1,(2)}}$ にも属する）．ここで $df=g\,dx$ をみたす f は，$x>1$ では $f(x)=\log x+c$ という形でなければならないから，$L^2(\mathbb{R})$ に属することはない．したがって $\omega=g\,dx\notin\operatorname{im}d_{1,(2)}$ である．先ほど述べたとおり $i_\sharp$ は線形同型写像なので，$\omega\notin\operatorname{im}\overline{d_{1,(2)}}$ もいえる．ところで $df=g\,dx$ をみたす $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ を一つとり，$\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $(-2,2)$ に台をもつ C^∞ 級関数であって $[-1,1]$ 上では $\phi\equiv 1$ であるようなものとし，$\phi_n(x)=\phi(x/n)$ と定めれば，$n\to\infty$ のとき $d(\phi_n f)$ は $g\,dx$ に L^2 収束する（問題 12.3）．$d(\phi_n f)\in\operatorname{im}\overline{d_{1,(2)}}$ であるにもかかわらず $\omega=g\,dx\notin\operatorname{im}\overline{d_{1,(2)}}$ だから，$\operatorname{im}\overline{d_{1,(2)}}$ は閉部分空間でない．

*J. Cheeger, On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds, *Proc. Symp. Pure Math.* **36** (1980), 91–146.

†以下の議論は J. Cheeger, M, Goresky, R. MacPherson, L^2-cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties（S.-T. Yau (ed.), *Seminar on Differential Geometry*, Princeton University Press, 1982 に収録されている）による．

❖ 完備 Riemann 多様体の L^2 調和形式と簡約 L^2 コホモロジー

ここからは，ふたたび完備 Riemann 多様体 (M,g) を考える．(12.1) と同様に，$\delta_{k,(2)}$ および $\Delta_{k,(2)}$ を，$\operatorname{dom}\delta_{k,(2)} = \{\omega \in \Omega^k_{(2)} \mid \delta\omega \in \Omega^{k-1}_{(2)}\}$，$\operatorname{dom}\Delta_{k,(2)} = \{\omega \in \Omega^k_{(2)} \mid \Delta\omega \in \Omega^k_{(2)}\}$ を定義域とするような δ および Δ のことと定めよう．

$$\mathcal{H}^k_{(2)} = \ker\Delta_{k,(2)} = \{\omega \in \Omega^k_{(2)} \mid \Delta\omega = 0\} \tag{12.3}$$

とかき，その元を L^2 **調和形式**とよぶことにする．これについて次の事実がある．

定理 12.5. 完備 Riemann 多様体 (M,g) では

$$\begin{aligned} L^2_{(k)}(M) &= \mathcal{H}^k_{(2)} \oplus \overline{\operatorname{im}\Delta_{k,(2)}} \\ &= \mathcal{H}^k_{(2)} \oplus \overline{\operatorname{im} d_{k-1,(2)}} \oplus \overline{\operatorname{im}\delta_{k+1,(2)}} \\ &= \mathcal{H}^k_{(2)} \oplus \overline{\operatorname{im} d_{k-1,c}} \oplus \overline{\operatorname{im}\delta_{k+1,c}} \end{aligned} \tag{12.4}$$

が成立する．各行は直交直和分解である．

注 12.6. 完備でない Riemann 多様体も含めて考えるときは，$\mathcal{H}^k_{(2)} = \{\omega \in \Omega^k_{(2)} \mid d\omega = 0,\ \delta\omega = 0\}$ という定義を採用するのがおそらく一般的である（問題 12.4 により，(M,g) が完備ならばこれは (12.3) と同じもの）．このように定めておけば，$L^2_{(k)}(M) = \mathcal{H}^k_{(2)}(M) \oplus \overline{\operatorname{im} d_{k-1,c}} \oplus \overline{\operatorname{im}\delta_{k+1,c}}$ は (M,g) が完備かどうかにかかわらず正しい．

さらに $\ker\overline{d_{k,(2)}} = \mathcal{H}^k_{(2)}(M) \oplus \overline{\operatorname{im} d_{k-1,(2)}}$ が確かめられる．したがって次がなりたつ．

系 12.7. $\overline{H}^k_{(2)}(M) = \ker\overline{d_{k,(2)}}/\overline{\operatorname{im} d_{k-1,(2)}}$ とおけば，完備 Riemann 多様体では $\overline{H}^k_{(2)}(M) \cong \mathcal{H}^k_{(2)}$．

$\overline{H}^k_{(2)}(M)$ のことを**簡約 L^2 コホモロジー**（reduced L^2 cohomology）とよぶ．なお，一般に可閉作用素 T について $\overline{\operatorname{im}\overline{T}} = \overline{\operatorname{im} T}$ なので*，$\overline{H}^k_{(2)}(M) = \ker\overline{d_{k,(2)}}/\overline{\operatorname{im}\overline{d_{k-1,(2)}}}$ としても同じである．

例 12.8. $\mathbb{R}$ は完備である．$\mathbb{R}$ 上の調和関数は $f(x) = ax+b$ の形だが，これが二乗可積分なのは $a=b=0$ のときだけなので $\overline{H}^0_{(2)}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{H}^0_{(2)} = 0$．同様に $\overline{H}^1_{(2)}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{H}^1_{(2)} = 0$．

定理 12.5 を示すうえで重要なのは次の補題 12.9 である．われわれはこの結果は認める．

補題 12.9. 完備 Riemann 多様体 (M,g) では，任意の $\omega \in \operatorname{dom}\Delta_{k,(2)}$ に対し，$\Omega^k_c(M)$ の元の列 $\{\omega_j\}$ であって $\omega_j \to \omega$，$\Delta\omega_j \to \Delta\omega$（どちらも L^2 収束）をみたすようなものがとれる．

注 12.10. 補題 12.9 の主張は $\Delta^*_{k,c} = \overline{\Delta_{k,c}}$（定理 6.6）に含まれる（実際，$\Delta^*_{k,c} = \overline{\Delta_{k,c}}$ は命題 6.7 (2) と同じことなのだった）．非コンパクトな完備 Riemann 多様体について $\Delta^*_{k,c} = \overline{\Delta_{k,c}}$ を示すのはかなり難しい†．また，補題 12.9 だけ示せばいいのなら多少簡単かというと，そういうわけでもないようだ．

---

*$\operatorname{im} T \subset \operatorname{im}\overline{T} \subset \overline{\operatorname{im} T}$ による．

†M. Gaffney, A special Stokes's theorem for complete Riemannian manifolds, *Ann. of Math.* **60** (1954), 140–145 による．R. Strichartz, Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold, *J. Funct. Anal.* **52** (1983), 48–79 も参照せよ．

［定理 12.5 の証明の概略］von Neumann の定理（定理 6.4）により $L^2_{(k)}(M) = \ker \Delta^*_{k,(2)} \oplus \overline{\operatorname{im} \Delta_{k,(2)}}$ である．$\omega \in \ker \Delta^*_{k,(2)} \Longleftrightarrow$ 任意の $\alpha \in \operatorname{dom} \Delta_{k,(2)}$ について $(\omega, \Delta\alpha) = 0 \Longleftrightarrow$ 任意の $\alpha \in \Omega^k_c(M)$ について $(\omega, \Delta\alpha) = 0$（2 番目の $\Longleftrightarrow$ は補題 12.9 による）だが，最後の条件は $\tilde{\Delta}\omega = 0$ と同じことであり（$\tilde{\Delta}$ は超関数微分により定義したもの），そのとき局所楕円型正則性（説明は略）により $\omega \in \Omega^k_{(2)}(M)$ かつ $\Delta\omega = 0$ となる．すなわち $\ker \Delta^*_{k,(2)} = \mathcal{H}^k_{(2)}$．これで (12.4) の 1 行目が示せた．

補題 12.9 からはまた，$\omega \in \operatorname{dom} \Delta_{k,(2)}$ ならば $d\omega$，$\delta\omega$，$\delta d\omega$，$d\delta\omega$ が全部 L^2 であることがわかる（前半 2 つは問題 12.4．同時に $\Delta_{k,(2)}\omega = 0 \Rightarrow d\omega = \delta\omega = 0$ もわかる．後半 2 つも同様）．ゆえに $\operatorname{im} \Delta_{k,(2)} \subset \operatorname{im} d_{k-1,(2)} + \operatorname{im} \delta_{k+1,(2)}$．あとは $\operatorname{im} d_{k-1,(2)} \perp \operatorname{im} \delta_{k+1,(2)}$，$\mathcal{H}^k_{(2)} \perp \operatorname{im} d_{k-1,(2)}$，$\mathcal{H}^k_{(2)} \perp \operatorname{im} \delta_{k+1,(2)}$ を確かめることで (12.4) の 2 行目を得る．たとえば最初の主張については，$\eta \in \operatorname{dom} d_{k-1,(2)}$，$\tau \in \operatorname{dom} \delta_{k+1,(2)}$ とすれば，命題 6.7 (1) により $\Omega^{k-1}_c(M)$ の元の列 $\{\eta_j\}$ であって $\eta_j \to \eta$，$d\eta_j \to d\eta$ であるようなものがとれる．そして $(d\eta, \delta\tau) = \lim(d\eta_j, \delta\tau) = \lim(d^2\eta_j, \tau) = 0$．$\overline{\operatorname{im} d_{k-1,(2)}} = \overline{\operatorname{im} d_{k-1,c}}$ および $\overline{\operatorname{im} \delta_{k+1,(2)}} = \overline{\operatorname{im} \delta_{k+1,c}}$ は，命題 6.7 (1) からただちに従う． □

［$\ker \overline{d_{k,(2)}} = \mathcal{H}^k_{(2)} \oplus \overline{\operatorname{im} d_{k-1,(2)}}$ の証明］$\mathcal{H}^k_{(2)} \subset \ker d_{k,(2)} \subset \ker \overline{d_{k,(2)}}$ は正しい．また，$\operatorname{im} d_{k-1,(2)} \subset \ker d_{k,(2)}$ は明らかなので $\overline{\operatorname{im} d_{k-1,(2)}} \subset \ker \overline{d_{k,(2)}}$ である．あとは $\ker \overline{d_{k,(2)}} \perp \overline{\operatorname{im} \delta_{k-1,(2)}}$ を示せばよく，そのためには $\ker d_{k,(2)} \perp \operatorname{im} \delta_{k-1,(2)}$ を示せば十分．$\omega \in \ker d_{k,(2)}$，$\eta \in \operatorname{dom} \delta_{k-1,(2)}$ に対し，$\Omega^{k-1}_c(M)$ の元の列 $\{\eta_j\}$ であって $\eta_j \to \eta$，$\delta\eta_j \to \delta\eta$ であるようなものがとれる．これを用いれば $(\omega, \delta\eta) = \lim(\omega, \delta\eta_j) = \lim(d\omega, \eta_j) = 0$ である． □

問題

問題 12.1．$\operatorname{im} \overline{d_{k-1,(2)}} \subset \ker \overline{d_{k,(2)}}$ であることを示せ．［ヒント：最小閉拡張の定義を冷静に運用せよ．］

問題 12.2．V_1，V_2 を Hilbert 空間とする．V_1 から V_2 への閉作用素 T があり，$V_2/\operatorname{im} T$ が有限次元ベクトル空間であるとしよう．そのとき $\operatorname{im} T$ は V_2 の閉部分空間であることを示したい．

(1) $\ker T$ は V_1 の閉部分空間だから，V_1 を $(\ker T)^\perp$ におきかえることにより，はじめから T は単射であったとしてよい．以下この追加の仮定のもとで考える．$N = \dim(V_2/\operatorname{im} T)$ とおく．$V_1 \oplus \mathbb{R}^N$ から V_2 への閉作用素 $\tilde{T}$ であって，任意の $v \in \operatorname{dom} T$ に対し $(v, 0) \in \operatorname{dom} \tilde{T}$ で $\tilde{T}(v, 0) = Tv$ であり，さらに全射かつ単射であるようなものを構成せよ．

(2) $S : V_2 \to V_1 \oplus \mathbb{R}^N$ を，各 $w \in V_2$ に対し $\tilde{T}\tilde{v} = w$ をみたす唯一の $\tilde{v} \in V_1 \oplus \mathbb{R}^N$ をとり，$Sw = \tilde{v}$ と定めることにより定義する．これは V_2 全体で定義された閉作用素であることを示せ．

(3) (2) の結論と閉グラフ定理によって S は有界作用素である．したがって V_1 の S による逆像（ここで V_1 を $\{(v, 0) \mid v \in V_1\}$ と同一視している）は V_2 の閉部分空間である．この逆像が $\operatorname{im} T$ に等しいことを確かめよ．

問題 12.3．g を例 12.4 の関数とし，$f' = g$ をみたす $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ を任意にとる．そのとき，例 12.4 のように ϕ および ϕ_n を定めれば，$(\phi_n f)'$ は g' に L^2 収束することを示せ．［ヒント：$(\phi_n f)' = \phi_n g + \phi'_n f$ である．$\phi_n g \to g$，$\phi'_n f \to 0$（L^2 収束）を証明せよ．$M = \sup|\phi'|$ とおけば $\sup|\phi'_n| = M/n$．］

問題 12.4．完備 Riemann 多様体において，任意の $\omega \in \operatorname{dom} \Delta_{k,(2)}$ に対し，$d\omega \in \Omega^{k+1}_{(2)}$，$\delta\omega \in \Omega^{k-1}_{(2)}$ であり，$\|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2 \leqq \|\omega\|\|\Delta\omega\|$ が成り立つことを示せ．［ヒント：$\omega \in \Omega^k_c$ ならば明らか．一般の ω に対し補題 12.9 の $\{\omega_j\}$ をとる．$\{d\omega_j\}$，$\{\delta\omega_j\}$ は Cauchy 列で，その極限が $d\omega$，$\delta\omega$ に一致することを確かめよ．］