11 主定理の証明

下記の定理の証明について説明する.

定理 3.3 (Hodge–de Rham–小平分解). 閉 Riemann 多様体 (M, g) において, $\Omega^k(M)$ は

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k \oplus \text{im } \Delta$$

のように直交直和分解される. ここで $\text{im } \Delta$ は $\Delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ の像を表している.

定理 3.3 の証明のため, われわれは以下のような Δ の拡張を導入してきた.

- $\bar{\Delta}$ —— Δ の最小閉拡張 (20 ページ). $L^2_{(k)}(M)$ から $L^2_{(k)}(M)$ への閉作用素.
- Δ^* —— Δ もしくは $\bar{\Delta}$ の共役作用素 (21 ページ). $L^2_{(k)}(M)$ から $L^2_{(k)}(M)$ への閉作用素. したがって最小閉拡張 $\bar{\Delta}$ の拡張でもある. 実際には $\Delta^* = \bar{\Delta}$ が成り立つ (定理 6.6).
- $\tilde{\Delta}$ —— Δ の局所座標表示において, 偏導関数を L^2 偏導関数によって置き換えて得られる作用素 (29 ページ). 有界作用素 $W^2_{(k)}(M) \rightarrow L^2_{(k)}(M)$. なお任意の整数 $m \geq 0$ に対して $\tilde{\Delta}(W^{m+2}_{(k)}(M)) \subset W^m_{(k)}(M)$ であり, $\tilde{\Delta}$ の制限は有界作用素 $W^{m+2}_{(k)}(M) \rightarrow W^m_{(k)}(M)$ を定める.

共役作用素に関する von Neumann の定理 (定理 6.4) によって $L^2_{(k)}(M) = \ker \bar{\Delta} \oplus \overline{\text{im } \Delta^*}$ がわかっている*. 定理 3.3 を得るには, あとは次が証明されればよかった (Δ^* は $\bar{\Delta}$ の拡張なので, 定理 6.11 から $\bar{\Delta}$ に関する同様の主張が導かれ, したがって $\ker \bar{\Delta} = \mathcal{H}^k$ がわかることに注意).

定理 6.11 (Δ^* に関する正則性定理). $\omega \in \text{dom } \Delta^*$ について, $\Delta^*\omega = \eta$ が C^∞ 級微分形式ならば ω も C^∞ 級微分形式.

定理 11.1. $\text{im } \Delta^*$ は $L^2_{(k)}(M)$ の閉部分空間である.

❖ $\tilde{\Delta}$ に関する正則性定理

定理 9.7' において, 任意の整数 $m \geq 0$ に対し次のような有界作用素 $S_m: W^m_{(k)}(M) \rightarrow W^{m+2}_{(k)}(M)$ が構成されていた. なお, 下記 (i) では $\tilde{\Delta}$ を $W^{m+2}_{(k)}(M) \rightarrow W^m_{(k)}(M)$ という有界作用素とみている.

- $S_m \tilde{\Delta} = I - K_{m+2}$ とおけば, $K_{m+2}: W^{m+2}_{(k)}(M) \rightarrow W^{m+2}_{(k)}(M)$ はコンパクト作用素.
- $W^{m+2}_{(k)}(M)$ の K_{m+2} による像は $W^{m+3}_{(k)}(M)$ に含まれ, K_{m+2} を $W^{m+2}_{(k)}(M)$ から $W^{m+3}_{(k)}(M)$ への写像とみなしたものは有界作用素.

* $\Delta^* = \bar{\Delta}$ であることを前提にすれば系 6.10 のように $L^2_{(k)}(M) = \ker \bar{\Delta} \oplus \overline{\text{im } \bar{\Delta}}$ とも書けるが, わざわざそうする意味はなかったため, ここでは $L^2_{(k)}(M) = \ker \bar{\Delta} \oplus \overline{\text{im } \Delta^*}$ と書いておいた.

さらに S_m は次をみたすようにできる。(これは定理 9.7' の主張には含めていなかったが、証明の中で構成した S_m は実際にこの性質をもっている.)

- (iii) $W_{(k)}^{m+1}(M)$ の S_m による像は $W_{(k)}^{m+3}(M)$ に含まれ, S_m を $W_{(k)}^{m+1}(M)$ から $W_{(k)}^{m+3}(M)$ への写像とみなしたものは有界作用素.

この左パラメトリクス S_m を用いて, 次の結論がすぐに導かれる.

命題 11.2 ($\tilde{\Delta}$ に関する正則性定理). $\omega \in W_{(k)}^2(M)$ とする.

- (1) 任意の整数 $m \geq 0$ について, $\tilde{\Delta}\omega \in W_{(k)}^m(M)$ ならば $\omega \in W_{(k)}^{m+2}(M)$ である.
 (2) さらに, $\tilde{\Delta}\omega \in \Omega^k(M)$ ならば $\omega \in \Omega^k(M)$ である.

[証明] $\omega \in W_{(k)}^2(M)$ について

$$S_0\tilde{\Delta}\omega = \omega - K_2\omega.$$

ここで仮に $\tilde{\Delta}\omega \in W_{(k)}^1(M)$ とすれば, 上述の性質 (iii) から左辺の $S_0\tilde{\Delta}\omega$ は $W_{(k)}^3(M)$ に属する. 一方, 性質 (ii) から右辺の $K_2\omega$ も $W_{(k)}^3(M)$ に属する. ゆえに $\omega \in W_{(k)}^3(M)$ である. 同様の議論を繰り返すことで $\tilde{\Delta}\omega \in W_{(k)}^m(M) \Rightarrow \omega \in W_{(k)}^{m+2}(M)$ が得られる.

もし $\tilde{\Delta}\omega \in \Omega^k(M)$ ならば, 任意の $m \geq 0$ について $\tilde{\Delta}\omega \in W_{(k)}^m(M)$ なので, 前半の結論により任意の $m \geq 0$ について $\omega \in W_{(k)}^{m+2}(M)$. Sobolev の埋め込み定理 (定理 7.2) によって $\omega \in \Omega^k(M)$ である. □

❖ Δ^* に関する正則性定理

命題 11.2 を示した流れにしたがって自然に定理 6.11 を証明するには, 負の指数 m をもつ Sobolev 空間をも導入すべきであった. 今からあらためて定義を細かく説明するのは避けようと思うが, いくつか要点を述べておく.

結論からいえば, すべての $m \in \mathbb{Z}$ に対して, 微分形式のなす Hilbert 空間 $W_{(k)}^m(M)$ を定義することができる*. これらは次のような階層をなしている:

$$\cdots \supseteq W_{(k)}^{-2}(M) \supseteq W_{(k)}^{-1}(M) \supseteq W_{(k)}^0(M) = L_{(k)}^2(M) \supseteq W_{(k)}^1(M) \supseteq W_{(k)}^2(M) \supseteq \cdots.$$

$W_{(k)}^m(M)$ も「微分形式のなす Hilbert 空間」であると書いたが, $m < 0$ の場合は, $\omega \in W_{(k)}^m(M)$ を局所座標表示したときの係数として現れる関数は, 一般には L^2 関数でさえなく, Schwartz 超関数 (distribution) である.

p 階微分作用素 P があるとき, その局所座標表示にあらわれる通常の偏導関数を distribution の意味での偏導関数に置き換えることによって, 有界作用素 $\tilde{P}: W_{(k)}^{m+p}(M) \rightarrow W_{(k)}^m(M)$ を定めることができる. その特別な場合として, すべての $m \in \mathbb{Z}$ について, Hodge ラプラシアンは $\tilde{\Delta}: W_{(k)}^{m+2}(M) \rightarrow W_{(k)}^m(M)$ という有界作用素を定義する.

*もっといってすべての $m \in \mathbb{R}$ に対して定義できるが, われわれはそこまでのことは必要としない.

注 11.3. $W_{(k)}^m(M)$ を定義する上でまず必要なのは, Euclid 空間上の関数のなす Sobolev 空間 $W^m(\mathbb{R}^n)$ である. $m \geq 0$ の場合と異なり, 一般の m については「 m 回 L^2 偏微分可能」という言明は意味をもたない. 代替策として, Fourier 変換を用いて「 $f \in W^m(\mathbb{R}^n)$ 」の意味を定める. このとき, そもそも大前提として f は L^2 関数ではない場合もあると思っているのだから, Fourier 変換も L^2 関数に関する理論だけでは不十分で, 緩増加超関数 (tempered distribution) に関する理論を使う必要がある.

それができたらあとは 26 ページと同様にすればよい. 閉多様体 M にあらかじめアトラス $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ (ただし Λ は有限集合) とそれに従属する 1 の分割 $\{\psi_\lambda\}$ を定めておく. その上で $W_{(k)}^m(M)$ を, 各チャート U_λ において Schwartz 超関数を係数とする局所座標表示 $\omega = \sum \omega_I dx^I$ をもつような微分形式 ω であって, 各 $\psi_\lambda \omega_I$ が $W^m(\mathbb{R}^n)$ に属しているようなものすべてからなる空間であると定義する.

このように $\tilde{\Delta}$ の意味を拡張すると, Δ^* の定義は次のように記述することもできる.

$$\text{dom } \Delta^* = \{\omega \in L_{(k)}^2(M) \mid \tilde{\Delta}\omega \in L_{(k)}^2(M)\}, \quad \omega \in \text{dom } \Delta^* \text{ に対して } \Delta^*\omega = \tilde{\Delta}\omega. \quad (11.1)$$

実際, $\eta = \Delta^*\omega$ を特徴づける性質とは, 任意の $\alpha \in \Omega^k(M)$ に対して

$$\int_M \langle \eta, \alpha \rangle dV_g = \int_M \langle \omega, \Delta\alpha \rangle dV_g \quad (11.2)$$

が成り立つということである. しかしこれは, Schwartz 超関数の微分の定義に照らすと $\eta = \tilde{\Delta}\omega$ を特徴づける式といってもいいのである. 任意の $\omega \in L_{(k)}^2(M)$ に対し, $\eta = \tilde{\Delta}\omega \in W_{(k)}^{-2}(M)$ はつねに定義され, それは関係式 (11.2) によって特徴づけられる. この η がたまたま $L_{(k)}^2(M)$ に属していたならば, そのとき ω は Δ^* の定義域に属しているといわれ, η は $\Delta^*\omega$ とも書き表される, というのが (11.1) の内容である.

さて, 定理 9.7' で行った左パラメトリクス構成は, 方法はまったくそのまま $m < 0$ の場合にも拡張される. すなわち次が成り立つ.

定理 9.7''. (M, g) を閉 Riemann 多様体とする. そのとき, 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して, 有界作用素 $S_m : W_{(k)}^m(M) \rightarrow W_{(k)}^{m+2}(M)$ であって, 次の性質をみたすものが存在する.

- (i) $S_m \tilde{\Delta} = I - K_{m+2}$ とおけば, $K_{m+2} : W_{(k)}^{m+2}(M) \rightarrow W_{(k)}^{m+2}(M)$ はコンパクト作用素.
- (ii) $W_{(k)}^{m+2}(M)$ の K_{m+2} による像は $W_{(k)}^{m+3}(M)$ に含まれ, K_{m+2} を $W_{(k)}^{m+2}(M)$ から $W_{(k)}^{m+3}(M)$ への写像とみなしたものは有界作用素.
- (iii) $W_{(k)}^{m+1}(M)$ の S_m による像は $W_{(k)}^{m+3}(M)$ に含まれ, S_m を $W_{(k)}^{m+1}(M)$ から $W_{(k)}^{m+3}(M)$ への写像とみなしたものは有界作用素.

この定理を用いると, 命題 11.2 はただちに次のように拡張されることがわかるだろう.

命題 11.2''. ある $l \in \mathbb{Z}$ について $\omega \in W_{(k)}^l(M)$ であるとする. そのとき, 任意の $m \in \mathbb{Z}$ について $\tilde{\Delta}\omega \in W_{(k)}^m(M)$ ならば $\omega \in W_{(k)}^{m+2}(M)$ である. さらに $\tilde{\Delta}\omega \in \Omega^k(M)$ ならば $\omega \in \Omega^k(M)$ である.

定理 6.11 は命題 11.2'' の系としてえられる. 実際, $\omega \in \text{dom } \Delta^*$ ならば $\omega \in L^2(M)$ かつ $\tilde{\Delta}\omega = \Delta^*\omega$ である. したがって $\Delta^*\omega \in \Omega^k(M)$ ならば命題 11.2'' により $\omega \in \Omega^k(M)$.

注 11.4. 命題 11.2'' は $\Delta^* = \bar{\Delta}$ (定理 6.6) を証明する際にも役に立つ. $\Delta^* = \bar{\Delta}$ は定理 6.7 (2) の主張を示せば従うことを思い出そう. ところで命題 11.2'' によれば, 一般に $\omega \in \text{dom } \Delta^*$ ならば $\omega \in W_{(k)}^2(M)$ である*. したがって定理 6.7 (2) を示すには, 任意の $\omega \in W_{(k)}^2(M)$ についてそれを $\Omega^k(M)$ の元によって W^2 ノルムに関し近似する列が得られればよい (なぜなら, $\omega \in \text{dom } \Delta^*$ についてそのような近似列 $\{\omega_j\}$ をとれば, とくに L^2 ノルムに関して $\omega_j \rightarrow \omega$, $\Delta\omega_j \rightarrow \bar{\Delta}\omega = \Delta^*\omega$ となるから). そのような列は, 命題 6.7 (1) の証明 (23 ページ) と同様, Friedrichs の軟化子を使って構成することができる.

❖ Δ^* が closed range をもつこと

残るは定理 11.1 の証明である. まず, $\bar{\Delta}$ の左パラメトリクスの存在によって次がわかる.

定理 11.5 ($\bar{\Delta}$ に関する楕円型評価). $l \leq m+2$ をみたす任意の $m, l \in \mathbb{Z}$ に対し, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $\omega \in W^{m+2}(M)$ について

$$\|\omega\|_{m+2} \leq C(\|\bar{\Delta}\omega\|_m + \|\omega\|_l)$$

が成り立つ.

[証明] $l = m+2$ のときは自明. $S_{m-1}\bar{\Delta}\omega = \omega - K_{m+1}\omega$ であるから $\|\omega\|_{m+2} \leq C(\|\bar{\Delta}\omega\|_m + \|\omega\|_{m+1})$ である. あとはこれを繰り返せばよい. □

注 11.6. 定理 11.5 はいうなれば「大域楕円型評価」であるが, 「局所楕円型評価」もある. パラメトリクスの構成は後回しにして (あるいはそのようなものの構成は最後までまったく行わず), 局所楕円型評価を初めに示し, それを根本に据えて調和積分論の議論を組み立てていく方法もある.

命題 6.12 によれば, 次の結果を証明すれば定理 11.1 がえられる.

命題 11.7. ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $\omega \in \text{dom } \Delta^* \cap (\ker \Delta^*)^\perp$ に対して $\|\omega\| \leq C\|\Delta^*\omega\|$.

命題 11.2'' から $\text{dom } \Delta^* = W_{(k)}^2(M)$, $\ker \Delta^* = \mathcal{H}^k$ がわかるので, これは言い換えれば, ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $\omega \in W_{(k)}^2(M) \cap (\mathcal{H}^k)^\perp$ に対して $\|\omega\| \leq C\|\bar{\Delta}\omega\|$ が成り立つということである.

[証明] そうでないとするば, $\|\omega_j\| = 1$ かつ $\|\bar{\Delta}\omega_j\| \rightarrow 0$ であるような $W_{(k)}^2(M) \cap (\mathcal{H}^k)^\perp$ の元の列 $\{\omega_j\}$ が存在する. このとき定理 11.5 によって $\|\omega_j\|_2$ は有界であるから, Rellich の定理により $\{\omega_j\}$ は $L_{(k)}^2$ における収束部分列をもつ. その収束部分列をあらためて $\{\omega_j\}$ と書くことにしよう. すると極限 $\omega = \lim \omega_j$ は $\|\omega\| = 1$ をみたすのでとくに 0 ではなく, しかも $(\mathcal{H}^k)^\perp$ の元である. ところが任意の $\alpha \in \Omega^k(M)$ に対して

$$(\omega, \Delta\alpha) = \lim(\omega_j, \Delta\alpha) = \lim(\Delta^*\omega_j, \alpha) = \lim(\bar{\Delta}\omega_j, \alpha) = 0$$

であるから, $\omega \in \text{dom } \Delta^*$ かつ $\Delta^*\omega = 0$ で, したがって $\omega \in \mathcal{H}^k$ でもある. これは矛盾. □

逆に $W_{(k)}^2(M)$ の元 ω は明らかに $\text{dom } \Delta^$ に属する (そして $\Delta^*\omega = \bar{\Delta}\omega$ である) ので, 実は $\text{dom } \Delta^* = W_{(k)}^2(M)$ であり, Δ^* とは $\bar{\Delta}: W_{(k)}^2(M) \rightarrow L_{(k)}^2(M)$ そのもの!