

10 パラメトリクスの構成 (2)

定理 3.3 の証明の完成に向けて、われわれは閉多様体において、 $\tilde{\Delta}$ の精密な左パラメトリクス S を構成したい。「精密な」の意味は定理 9.7 で述べたようなことだが、今回は定理 9.7 を次のように修正した上で証明する*。

定理 9.7'. (M, g) を閉 Riemann 多様体とする。そのとき、任意の非負整数 m に対して、有界作用素 $S_m: W_{(k)}^m(M) \rightarrow W_{(k)}^{m+2}(M)$ であって、次の性質をみたすものが存在する。

- (i) $S_m \tilde{\Delta} = I - K_{m+2}$ とおけば、 $K_{m+2}: W_{(k)}^{m+2}(M) \rightarrow W_{(k)}^{m+2}(M)$ はコンパクト作用素。
- (ii) $W_{(k)}^{m+2}(M)$ の K_{m+2} による像は $W_{(k)}^{m+3}(M)$ に含まれ、 K_{m+2} を $W_{(k)}^{m+2}(M)$ から $W_{(k)}^{m+3}(M)$ への写像とみなしたものは有界作用素。

なお、(ii) は (i) の主張を含む。実際、 K_{m+2} は有界作用素 $W_{(k)}^{m+2}(M) \rightarrow W_{(k)}^{m+3}(M)$ と埋め込み $W_{(k)}^{m+3}(M) \hookrightarrow W_{(k)}^{m+2}(M)$ の合成であり、後者は Rellich の定理によりコンパクトだからである。

さて、今回はこのような左パラメトリクスの構成を局所的な構成に帰着して行うと述べたが、方針を変更して、直接 M 全体で構成することにする。そのためには以下に述べるような Riemann 幾何学の多少の基礎知識が必要になる。

❖ Riemann 多様体の正規座標系

Riemann 多様体 (M, g) の測地線 $\gamma(t)$ は (M, g) 上を“まっすぐ一定の速さで”進むような曲線のことであり、始点 $\gamma(0)$ と初速度 $\dot{\gamma}(0)$ によって一意に決定される。とくに、始点 $p \in M$ を固定したとき、 $v \in T_p M$ に対し、それを初速度とする測地線 $\gamma_v(t)$ が考えられる。 $|v|$ が十分に小さければ、この測地線は $t = 1$ まで延びる[†]。このとき写像 $v \mapsto \gamma_v(1)$ のことを点 p における**指数写像**といい、 $\exp_p$ で表す。

$r > 0$ を十分に小さくとれば、 $T_p M$ の原点を中心とする半径 r の開球 $B(0; r)$ において、 $\exp_p$ は像の上への微分同相写像となることが比較的容易にわかる（像を $B_r(p)$ で表すことにする）。さらに $T_p M$ の正規直交基底を用いて $T_p M$ を $\mathbb{R}^n$ と同一視しておけば、 $\exp_p$ の逆写像によって $B_r(p)$ には局所座標系を与える写像 $\varphi_p: B_r(p) \rightarrow B(0; r) \subset \mathbb{R}^n$ が定まる。この局所座標系を点 p を中心とする**正規座標系**という。 $B_r(p)$ は**正規座標近傍**とよぶことにしよう。

点 p を中心とする正規座標系に関する Riemann 計量の局所座標表示 g_{ij} を考えると、点 p に

*定理 9.7 の条件をみたす S も結果的には存在するのだが、その事実を松本が予定していた方法で証明できるかという、改めてよく検討したところうまくいかなかった。

[†] (M, g) が完備 Riemann 多様体ならば、実際には $|v|$ の大きさによらず $\gamma_v(t)$ はすべての $t \in \mathbb{R}$ に対し定義される (Hopf-Rinow の定理)。とくに閉 Riemann 多様体ならばそうである。

おいては

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}$$

となる。この意味で、正規座標系は点 p の近くで、 M の Euclid 空間による近似を与えている。正規座標系について次の事実があるので指摘しておく。

補題 10.1. 閉 Riemann 多様体 (M, g) では、十分小さな $r > 0$ をとれば、任意の $p \in M$ について、正規座標系が $B_r(p)$ において定義される（すなわち $\exp_p$ が $B(0; r)$ からその像の上への微分同相写像を与える）。

❖ Δ の左パラメトリクスの構成

(M, g) を閉 Riemann 多様体とする。補題 10.1 に述べられた性質をみたすような r を一つとり、また点 $p \in M$ をとって、正規座標近傍 $B_r(p)$ を考える。さらに $r < \pi$ としておく。すると、 $B(0; r) \subset \mathbb{R}^n$ は一辺 2π の開超立方体に含まれ、したがってトーラスへの射影 $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ によって、 $B(0; r)$ から T^n の開集合 W_r への微分同相写像が定義される（同じ記号 π で表す）。次の図式

$$\begin{array}{ccccc} & & B(0; r) & & \\ & \nearrow \varphi_p & & \searrow \pi & \\ M \supset B_r(p) & \xrightarrow{\Phi_p} & & W_r & \subset T^n \end{array}$$

が可換図式となるように $\Phi_p = \pi \circ \varphi_p$ とおく。微分同相写像 Φ_p を介して $B_r(p)$ と W_r を同一視することにしよう。 W_r には π の逆写像によって局所座標系が定義され、これは Φ_p を通じて $B_r(p)$ の正規座標系とちょうど対応している。

すると、 $B_r(p)$ に台をもつ微分形式 ω には、 (M, g) の Hodge ラプラシアン Δ を作用させることもできるし、 ω を W_r に台をもつ微分形式とみなすことでトーラス T^n の Hodge ラプラシアン Δ_0 を作用させることもできる。各々の局所座標表示は

$$(\Delta\omega)_I = -\sum_{i,j} g^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} \omega_I + (\text{低階項}), \quad (\Delta_0\omega)_I = -\sum_{i,j} \delta^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} \omega_I$$

である（ δ^{ij} は Kronecker のデルタ）。 $h^{ij} = g^{ij} - \delta^{ij}$ とおけば、

$$(\Delta\omega)_I = (\Delta_0\omega)_I - \sum_{i,j} h^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} \omega_I + (\text{低階項})$$

と表すことができる。

ここで $\varepsilon > 0$ が与えられたとし（ ε の具体的な値は後で決める）、 r をさらに十分小さくにとって $|h^{ij}| < \varepsilon$ となるようにしておく。詳しい説明は省くが、 M が閉多様体であることから、どんな $\varepsilon > 0$ が与えられたとしても、すべての点 p について $B_r(p)$ で $|h^{ij}| < \varepsilon$ が成り立つような r がとれる。さらに、われわれの行う構成においては次の事実が重要である。

補題 10.2. 補題 10.1 の条件をみたす任意の $r > 0$ について、有限集合 $\{p_\lambda\} \subset M$ を、次の 2 条件が成立するようにとることができる。

- (i) $\{B_r(p_\lambda)\}$ は M の開被覆である。
- (ii) 任意の点 $q \in M$ について、 $q \in B_r(p_\lambda)$ をみたす λ の個数は N 以下である。ただし N は r によらない定数。

[証明の概略] 「 $B_{r/2}(p_\lambda)$ たちはどの 2 つも互いに交わらない」という条件をみたす M の部分集合 $\{p_\lambda\}$ のうちで、包含関係について極大なものをとる*。その極大元をあらためて $\{p_\lambda\}$ と書けば、 $\{B_r(p_\lambda)\}$ は開被覆になる。というのは、もしある $q \in M$ が存在して $q \notin \bigcup B_r(p_\lambda)$ であるならば、任意の λ に対し $B_{r/2}(q) \cap B_{r/2}(p_\lambda) = \emptyset$ であり、 $\{p_\lambda\}$ の極大性に反するからである。

(M, g) の断面曲率が c_1 以上 c_2 以下であるとする。定曲率 c をもつ単連結 Riemann 多様体 (球面, Euclid 空間, 双曲空間のいずれか) の半径 R の開球の体積を $V_{c,R}$ で表そう。すると任意の点 p について $\text{Vol}(B_{r/2}(p)) \geq V_{c_2, r/2}$ (Gunther の定理), $\text{Vol}(B_{3r/2}(p)) \leq V_{c_1, 3r/2}$ (Bishop の定理) が成立する (なお $B_{3r/2}(p)$ は正規座標近傍としては定義されない可能性があるが, p を中心とする距離球と解釈する)。したがってまず, $\{p_\lambda\}$ の点の個数は $\text{Vol}(M)/V_{c_2, r/2}$ 以下で、とくに有限である。また任意の $q \in M$ について、 $q \in B_r(p_\lambda)$ がみたされるならば $B_{r/2}(p_\lambda) \subset B_{3r/2}(q)$ だから、そのような λ は高々 $V_{c_1, 3r/2}/V_{c_2, r/2}$ 個しか存在しない。 $V_{c_1, 3r/2}/V_{c_2, r/2}$ の値は $r \rightarrow 0$ のとき有限値 (具体的には 3^n) に収束するので、補題の主張の (ii) にあるような定数 N が存在する。□

与えられた $\varepsilon > 0$ について、各点 p について $B_r(p)$ で $|h^{ij}| < \varepsilon$ が成り立つような r をとり、補題 10.2 で述べた M の有限部分集合 $\{p_\lambda\}$ をとる。 $U_\lambda = B_r(p_\lambda)$ と書くことにしよう。 $\{U_\lambda\}$ は M の開被覆である。

さてここで、 $\{U_\lambda\}$ に従属する 1 の分割を、 $\{\chi_\lambda^2\}$ (χ_λ は C^∞ 級, $\text{supp } \chi_\lambda \subset U_\lambda$) という形でとっておく†。これを用いてトーラスにおける Hodge ラプラシアンに対する Green 作用素 G を貼り合わせよう。すなわち、有界作用素 $S'_m: W_m^m(M) \rightarrow W_{(k)}^{m+2}(M)$ を、 $\eta \in W_{(k)}^m(M)$ に対し

$$S'_m \eta = \sum_\lambda \chi_\lambda G(\chi_\lambda \eta) \quad (10.1)$$

とおくことにより定義する。

注 10.3. (10.1) には χ_λ を掛ける操作が 2 回現れている。最初のそれは、もともと大きな台をもっているかもしれない M 上の η を、 U_λ に台をもつ微分形式にする効果をもっている。そうすると $\chi_\lambda \eta$ は W_r に台をもつ微分形式とも解釈でき、 G を作用させることができる。2 回目のそれは、再び大きな台をもっているかもしれない T^n 上の $G(\chi_\lambda \eta)$ を、 W_r に台をもつ微分形式にする効果をもっている。そうして得られる $\chi_\lambda G(\chi_\lambda \eta)$ は U_λ に台をもつ微分形式と解釈される。

*Zorn の補題により極大元が存在する。もしくは、後述のようにそのような $\{p_\lambda\}$ の濃度は高々 $\text{Vol}(M)/V_{c_2, r/2}$ なので、濃度の最大値を達成するような $\{p_\lambda\}$ が存在し、それは極大元になっている。

† $U'_\lambda \in U_\lambda$ なる M の開被覆 $\{U'_\lambda\}$ をとり、 $\text{supp } \psi_\lambda \subset U'_\lambda$ かつ U'_λ では $\psi_\lambda \neq 0$ であるような C^∞ 級関数 ψ_λ をとって、 $\chi_\lambda = \psi_\lambda / \sqrt{\sum |\psi_\lambda|^2}$ とおけばよい。

すると $\omega \in W_{(k)}^{m+2}(M)$ に対し

$$\begin{aligned}
S'_m \tilde{\Delta} \omega &= \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} G(\chi_{\lambda} \tilde{\Delta} \omega) = \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} G(\tilde{\Delta}(\chi_{\lambda} \omega)) + \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} G(\text{低階項}) \\
&= \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} G(\tilde{\Delta}_0(\chi_{\lambda} \omega)) + \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} G((\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}_0)(\chi_{\lambda} \omega)) + \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} G(\text{低階項}) \\
&= \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} (I - H)(\chi_{\lambda} \omega) - \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} G(h^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j}(\chi_{\lambda} \omega)) + \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} G(\text{低階項}) \\
&= \omega - \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} G(h^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j}(\chi_{\lambda} \omega)) - \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} H(\chi_{\lambda} \omega) + \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} G(\text{低階項})
\end{aligned} \tag{10.2}$$

が成り立つ。最後の表示における第 2 項を整理するために次の事実注意到する。

補題 10.4. (M, g) を閉 Riemann 多様体とする。 $\varphi \in C^{\infty}(M)$ とすれば、任意の m について、ある有界作用素 $T: W_{(k)}^m(M) \rightarrow W_{(k)}^{m+1}(M)$ が存在して

$$\|\varphi \omega - T\omega\|_m \leq (\sup |\varphi|) \|\omega\|_m$$

が成立する。

[証明の概略] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Second ed., Princeton University Press, 1995 の (6.16) Lemma および (6.18) Proposition の証明に、実質的には $\mathbb{R}^n$ における上記の事実の証明が与えられている。それを用いて M の場合も示せる。 $\square$

補題 10.4 を用いると、(10.2) に続けて計算を進めることにより、

$$S'_m \tilde{\Delta} \omega = \omega + Q\omega + T\omega \tag{10.3}$$

とできる。ただし T は有界作用素 $W_{(k)}^{m+2}(M) \rightarrow W_{(k)}^{m+3}(M)$ であり、 $Q: W_{(k)}^{m+2}(M) \rightarrow W_{(k)}^{m+2}(M)$ は

$$\|Q\omega\|_{m+2} \leq C\varepsilon \|\omega\|_{m+2}$$

という評価式をみたす。ここで C は G の作用素ノルムや $\sup |\chi_{\lambda}|$ の値、それと補題 10.2 の N によって決まるような定数であり、 r の選び方には依存しない。そこであらかじめ $\varepsilon = 1/2C$ とした上で上記の一連の手続きを実行したことにすれば、 $\|Q\omega\|_{m+2} \leq (1/2)\|\omega\|_{m+2}$ となる。ここで同時に、ここまでの評価を $\|\cdot\|_{m+2}$ だけでなく $\|\cdot\|_{m+3}$ についても同時に行い、適切に r を定めておけば、 $\|Q\omega\|_{m+3} \leq (1/2)\|\omega\|_{m+3}$ も成り立つようにできることに注意しておく。

Q の作用素ノルムが 1 未満となったので、関数解析の一般論により $I + Q$ は可逆な有界作用素であって、 $(I + Q)^{-1}$ は Neumann 級数 $I - Q + Q^2 - Q^3 + \dots$ によって与えられる（この $(I + Q)^{-1}$ は $W_{(k)}^{m+2} \rightarrow W_{(k)}^{m+2}$ という有界作用素であり、しかも $W_{(k)}^{m+3}$ に制限すれば $W_{(k)}^{m+3} \rightarrow W_{(k)}^{m+3}$ という有界作用素にもなる）。これを (10.3) の両辺に左から掛けて

$$(I + Q)^{-1} S'_m \tilde{\Delta} \omega = \omega + (I + Q)^{-1} T\omega$$

を得る。 $(I + Q)^{-1} S'_m$ が作ろうとしていた作用素 S_m である。これで定理 9.7' が証明された。