1　Riemann 計量，微分形式の内積

❖　Riemann 計量

M を多様体とする（とくに断らなくても σ コンパクトな C^∞ 級多様体のみを考える）．次元はこの講義を通じて n と書く．ただし $n \geqq 1$ とする．

定義. 次のような族 $g = \{g_p\}_{p\in M}$ を M の **Riemann 計量**という．

(i)　各点 $p \in M$ において，g_p は接空間 T_pM における内積である．
(ii)　g は C^∞ 級である（以下の説明を参照）．

また，多様体と Riemann 計量からなる組 (M, g) のことを **Riemann 多様体**という．

上記の (ii) の意味を説明しよう．M のチャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ における g の局所座標表示というものを考えたい*．点 $p \in U$ に対し

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \quad \dots, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

という接空間 T_pM の基底がある．この基底を用いて，$(dx^i)_p \otimes (dx^j)_p$ を

$$(dx^i)_p \otimes (dx^j)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)_p\right) = \begin{cases} 1 & （i = k,\ j = l \text{ のとき}）, \\ 0 & （\text{それ以外のとき}） \end{cases}$$

によって定まる T_pM 上の双線形形式であると定義する．すると g_p はそれらの線形結合として

$$g_p = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(dx^i)_p \otimes (dx^j)_p \tag{1.1}$$

の形に一意的に表せる（なぜか？）．$g_{ij}(p) = a_{ij}$ とおくことにより U 上の n^2 個の関数 g_{ij} を定義し，式 (1.1) をまとめて $g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,dx^i \otimes dx^j$（$U$ において）と表す．あるいは $\otimes$ を省略して

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,dx^i dx^j \qquad （U \text{ において}） \tag{1.2}$$

と書くほうが普通である．式 (1.2) を $(U; x^1, \dots, x^n)$ における g の**局所座標表示**という．

多様体 M のアトラス $\{(U_\lambda; x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n)\}$ を任意に選び，各チャートで g を局所座標表示する．このときどのチャートにおいても n^2 個の関数 g_{ij} がすべて U_λ 上で C^∞ 級ならば，g は（M 全体で）C^∞ **級**であるという．いま述べた条件の成立はアトラスの選び方によらない（なぜ？）．

*座標の添字を右下でなく右上に書くのは，微分幾何学では一般的である（Einstein の縮約記法と相性がよい）．

Riemann 計量 g が与えられているとき，$g_p(v,w)$ のことを $g(v,w)$ とも書く．$\langle v,w\rangle_g$ あるいは $\langle v,w\rangle$ で表すこともある．最後の書き方は Riemann 計量の名前をわざわざ意識したくないときに便利．さらに $|v|_g = \sqrt{\langle v,v\rangle_g}$ と定める．これも g を省略して $|v|$ とも書く．

例 1.1．$M=\mathbb{R}^n$ とおく．各 $p\in\mathbb{R}^n$ に対し，接空間 $T_p\mathbb{R}^n$ の標準基底

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,\quad \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p,\quad \dots,\quad \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

を正規直交基底とする内積のことを $T_p\mathbb{R}^n$ の**標準内積**という（$T_p\mathbb{R}^n$ を標準基底を用いて $\mathbb{R}^n$ と同一視してしまうこともある．その立場では，この内積は $\mathbb{R}^n$ の標準内積そのものである）．各 $p\in\mathbb{R}^n$ において標準内積を与える Riemann 計量のことを $\mathbb{R}^n$ の**標準計量**とか **Euclid 計量**といい，g_{std} と書くことにする．$(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{std}})$ を **Euclid 空間**という*．文脈からわかるときは，$(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{std}})$ のことを単に $\mathbb{R}^n$ で表す場合もある．

例 1.2．$\mathbb{R}^N$ の部分多様体 M を考える．点 $p\in M$ における接空間 T_pM は，通常 $T_p\mathbb{R}^N$ の部分ベクトル空間と解釈される（包含写像 $\iota\colon M\to\mathbb{R}^N$ の点 p における微分 $(\iota_*)_p$ を用いて，T_pM と像 $(\iota_*)_p(T_pM)$ を同一視する）．すると T_pM には，$T_p\mathbb{R}^N$ の標準内積を制限して得られる自然な内積 g_p が備わっている．こうして得られる $g=\{g_p\}_{p\in M}$ は M の Riemann 計量であって，$\mathbb{R}^N$ の Euclid 計量 g_{std} から**誘導される** Riemann 計量とよばれる．微分形式の引き戻しの記法にならって $g=\iota^* g_{\mathrm{std}}$ と書くことがある．

例 1.3．例 1.2 の特別な場合として，球面 S^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点を中心とする単位球面とみなすと，S^n には g_{std} から誘導される Riemann 計量が備わっていることがわかる．さらに $\mathbb{R}^n$，S^n と並んで重要な例として双曲空間 $\mathbb{H}^n$ があるが，深入りしない．

この講義では次のトーラス $T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ も重要な役割をはたす．

例 1.4．各 $a\in\mathbb{Z}^n$ に対し，$\tau_a\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を $\tau_a(x)=x+a$ と定める（τ は平行移動 translation の頭文字をとった）．こういうものを「群 $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用」というが，この作用を用いて，$\mathbb{R}^n$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$x\sim y \quad\Leftrightarrow\quad \text{ある } a\in\mathbb{Z}^n \text{ が存在して } \tau_a(x)=y$$

により定義する．商位相空間 $\mathbb{R}^n/{\sim}$（$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ と書くことも多い）を n 次元**トーラス**といって T^n で表す．

自然な射影 $\pi\colon\mathbb{R}^n\to T^n$ が局所同相写像であることに注意せよ．また，π が局所微分同相写像となるよう T^n に多様体の構造を一意的に導入できる．さらに，T^n の Riemann 計量 g を，任意の $p\in\mathbb{R}^n$ について

$$g((\pi_*)_p v, (\pi_*)_p w) = g_{\mathrm{std}}(v,w) \qquad (v,\ w\in T_p\mathbb{R}^n)$$

が成り立つよう一意的に定められる．トーラス T^n はこのようにして Riemann 多様体と思うことにする．

❖ Riemann 多様体における積分

Riemann 多様体 (M,g) における関数 f の積分を定義する†．ただし，f はコンパクト台をもつ連続関数に限定しておく．そのような関数すべてからなるベクトル空間を $C_c^0(M)$ で表す．

各チャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ において形式的に $dV_g=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1dx^2\cdots dx^n$ という記号を用意する．ただし $\det(g_{ij})$ は g_{ij} を並べてできる $n\times n$ 行列の行列式．その上で，M のアトラ

---

*ほんとうは Euclid 空間には $\mathbb{R}^n$ の原点のような特殊な点が存在するべきではないからこの定義には不満もあるが，そういううるさいことはここでは省く．

†この講義では，関数や微分形式はつねに実数値であるとする．複素数値の場合に拡張するのも簡単だから，必要に迫られたら自分で考えてみよう．

スを任意に一つ決めて $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\} = \{(U_\lambda; x_\lambda^1, x_\lambda^2, \dots, x_\lambda^n)\}$ とし，また $\{U_\lambda\}$ に従属する 1 の分割 $\{\psi_\lambda\}$ を用意して，

$$\begin{aligned}\int_M f\,dV_g &= \sum_\lambda \int_{U_\lambda} \psi_\lambda f\,dV_g \\ &= \sum_\lambda \int_{\varphi_\lambda(U_\lambda)} \psi_\lambda f \sqrt{\det(g_{ij})}\,dx_\lambda^1 dx_\lambda^2 \cdots dx_\lambda^n\end{aligned} \tag{1.3}$$

と定義する．最後の表示に現れている積分は，$\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ における単なる重積分．さらに $\displaystyle\sum_\lambda$ は実際には有限和である*.

注 1.5. ここでは「dV_g」を形式的な記号としたが，実は dV_g は M 全体において定義された幾何学的な意味をもつ“何か”であって，g に付随する**体積密度**（volume density）とか**体積測度**（volume measure）とよばれる．（密度束の切断，もしくは測度論の意味での M 上の測度．）

上記の積分 (1.3) の定義に多様体の向きづけはいらないが，向きが与えられているときは (1.3) を微分形式の積分とも解釈できる．向きに整合的なチャート $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ に関して

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

と局所的に定義すると，vol_g は M 全体で定義された微分 n 形式．これを g に付随する**体積形式**（volume form）という．この vol_g を用いると

$$\int_M f\,dV_g = \int_M f\,\mathrm{vol}_g\,.$$

（ここで採用した記号 dV_g と vol_g の使い分けは，一般的というわけではない．）

❖ 微分形式の内積

Riemann 多様体 (M, g) の点 $p \in M$ において，T_pM に内積 g_p が定められていることから T_p^*M にも内積が定まっている（問題 1.3）．$\{\theta^i\}$ をその正規直交基底の一つとして，

$$\theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k} \qquad \text{（ただし } i_1 < i_2 < \cdots < i_k\text{）}$$

という形の $\dbinom{n}{k}$ 個の元を正規直交基底とするような $\bigwedge^k T_p^*M$ の内積を考える．ずいぶんいいかげんな定義のようだが，実はこれで well-defined である．この $\bigwedge^k T_p^*M$ の内積も $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$ や $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表すことにする．

注 1.6. $\bigwedge^k T_p^*M$ における内積の定め方には複数の流儀がありうるが，調和積分論と相性がいいのはこれ．

α，$\beta \in \Omega^k(M)$ に対し，各 $p \in M$ ごとに内積 $\langle\alpha_p, \beta_p\rangle_g$ をとってえられる関数を $\langle\alpha, \beta\rangle_g$ で表し

$$(\alpha, \beta)_g = \int_M \langle\alpha, \beta\rangle_g\,dV_g$$

*1 の分割 $\{\psi_\lambda\}$ について $\{\mathrm{supp}\,\psi_\lambda\}$ は局所有限であることに注意．

と定義する（M が閉多様体*ならばいつでも $(\alpha,\beta)_g$ が定義されるが，非コンパクトならばさしあたり $\langle\alpha,\beta\rangle_g$ の台がコンパクトであることを前提とした上で）．また $\|\alpha\|_g = \sqrt{(\alpha,\alpha)_g}$ と定める．例によって g と書くのを省略することも多い．

閉多様体では，上記のようにすれば $(\cdot,\cdot)$ はベクトル空間 $\Omega^k(M)$ における内積となる．各 $p \in M$ ごとに定義された $\bigwedge^k T_p^*M$ における内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と区別するために，口頭では $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を**各点ごとの内積**，$(\cdot,\cdot)$ を L^2 **内積**などとよびわけることがある．

関連して，**Hodge の $*$ 作用素**を紹介しておく．これは向きづけられた Riemann 多様体においてのみ定義される線形作用素 $*\colon \bigwedge^k T_p^*M \to \bigwedge^{n-k} T_p^*M$ であり，(M,g) の向きに整合的な T_p^*M の任意の正規直交基底 $\{\theta^i\}$ に対し†

$$*(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k) = \theta^{k+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

となることを要請すれば一意的に定まる．微分形式については $*$ を各点ごとに作用させることにすれば $*\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ も定義される．とくに $*1 = \mathrm{vol}_g$，$*\mathrm{vol}_g = 1$（問題 1.4 による）．

Hodge の $*$ 作用素を使うと

$$\langle\alpha,\beta\rangle \mathrm{vol}_g = \alpha \wedge *\beta, \qquad (\alpha,\beta) = \int_M \alpha \wedge *\beta$$

と書くことができ，多少気持ちがよい．

問題

問題 1.1．例 1.1 で定義した g_{std} が確かに C^∞ 級であることを確かめよ．また，例 1.2 の $g = \iota^* g_{\mathrm{std}}$ が確かに C^∞ 級であることを確かめよ．

問題 1.2．例 1.4 に述べられていることを確かめよ．

問題 1.3．V を有限次元実ベクトル空間とし，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が与えられているとする．

(1) V の双対空間を V^* で表す．写像 $v \longmapsto \langle v,\cdot\rangle$ がベクトル空間の同型 $V \cong V^*$ を定めることを示せ．
(2) V の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は，(1) の同型を通じて V^* の内積を定める（同じ記号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表してしまうことが多い）．V の正規直交基底 e_1，e_2，……，e_n の双対基底を θ^1，θ^2，……，θ^n とするとき，後者は V^* の正規直交基底となっていることを確かめよ．

問題 1.4．向きづけられた Riemann 多様体 (M,g) の開集合 U において，微分形式 η^1，η^2，……，η^n が，各点 $p \in U$ で $\{\eta_p^i\}$ が M の向きに整合的な T_p^*M の正規直交基底となるよう選ばれているとする．そのとき，U 上で $\eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \cdots \wedge \eta^n = \mathrm{vol}_g$ であることを証明せよ．

問題 1.5．dV_g による積分計算の例を一つ示せ．（1 の分割を用いた定義は計算上は役立たずであることがわかるだろう．J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Springer, 2013 の Exercise 16.44 をみよ．）

問題 1.6．$\mathbb{R}^3$ に標準的な向きを与える．$*(-y\,dx \wedge dz + x\,dy \wedge dz)$ を複数の方法で求めよ．

---

*コンパクトな（境界をもたない）多様体のことを閉多様体という．

†ただし，T_p^*M の基底 $\{\theta^i\}$ が多様体 M に与えられた向きに整合的であるとは，向きに整合的なチャートからえられる $\{(dx^i)_p\}$ を考えたとき，$\det > 0$ であるような行列による基底変換で $\{(dx^i)_p\}$ から $\{\theta^i\}$ がえられることとする．