レポート問題の解答例・採点覚え書き

12 月 1 日出題のレポート問題の解答例を掲げ，どんな方針で採点をしたか説明します（各 10 点満点）．解答例はせっかくなので英語で書いてみます．

> 1. 多様体上の C^∞ 級微分形式とは何か．定義を説明せよ．（各点における接空間の概念は既知としてよい．）

Let M be a manifold. A *smooth* (or C^∞) *differential* 0-*form* on M is just the same thing as a smooth function $M \to \mathbb{R}$. We will define smooth differential k-forms for $k \geqq 1$ below.

For any $p \in M$, we write $\bigwedge^k T_p^*M$ for the set of alternating multilinear k-forms on the tangent space T_pM at p. A *differential k-form* (which is not necessarily smooth) is a mapping

$$\omega \colon M \to \coprod_{p\in M} T_p^*M$$

such that $\omega(p)$, which is more often written as ω_p, is an element of T_p^*M for each $p \in M$.

The smoothness of a differential k-form ω is defined as follows. Given a chart $(U; x^1, \dots, x^n)$ of M, we can uniquely express ω on U in the following form using the local coordinates:

$$\omega|_U = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

We say that ω is *smooth* if all the functions $f_{i_1\cdots i_k}$ are smooth on U for any chart $(U; x^1, \dots, x^n)$ of M.

接空間 T_pM の概念は既知として，そのあたりから順番に説明していくことを求めています．どの程度まで細部を説明するかは個々の判断ですが，以下の 3 項目は必須だと考えました．

(a) T_pM 上の交代的な多重（k 重）線形形式の空間 $\bigwedge^k T_p^*M$ を用いることへの言及

(b) 微分形式 ω とは各点 $p \in M$ に対し $\bigwedge^k T_p^*M$ の元を定めるような対応であるという説明

(c) チャートにおける局所座標表示とは $\omega|_U = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ という表示のことで，あらゆるチャートに関してすべての関数 $f_{i_1\cdots i_k}$ が C^∞ 級であることをもって ω が C^∞ 級であることの定義とするという説明

(a)，(b) がなければ 3 点ずつ減点し，(c) がなければ 5 点減点しています．その他，重大な欠陥と思われることがあって 5 点減点したケースがあります．なお微分 0 形式については言及がなくてもいいことにしています．また「$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$」の意味に関しては，今回の出題であればどちらかといえば説明すべきことだと思いますが，とくに減点対象とはしませんでした．

> 2. 多様体上の微分形式 ω に対し $d(d\omega) = 0$ であることを証明せよ．

According to our definition of exterior differentiation, it suffices to show that $d(d(\omega|_U)) = 0$ for any chart $(U; x^1, \dots, x^n)$.

Let ω be a differential k-form on a manifold M (we are implicitly assuming that ω is a smooth k-form), and $(U; x^1, \dots, x^n)$ an arbitrarily fixed chart of M. Then ω can be locally expressed as

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \cdots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

By computation, we have

$$d(\omega|_U) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

and hence

$$d(d(\omega|_U)) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{\partial^2 f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^l \partial x^j}\, dx^l \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \qquad (*)$$

Since $dx^p \wedge dx^p = 0$, the terms with $l = j$ on the right-hand side of equality $(*)$ vanishes. The rest of the terms can be classified into two groups based on whether $l < j$ or $l > j$. We set $(l, j) = (p, q)$ for the terms with $l < j$, and $(l, j) = (q, p)$ for those with $l > j$. Then $(*)$ can be rewritten as

$$\begin{aligned} d(d(\omega|_U)) = \sum_{p<q} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} & \frac{\partial^2 f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^p \partial x^q}\, dx^p \wedge dx^q \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ & + \sum_{p<q} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{\partial^2 f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^q \partial x^p}\, dx^q \wedge dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \end{aligned}$$

and since $dx^q \wedge dx^p = -dx^p \wedge dx^q$, we can conclude that

$$d(d(\omega|_U)) = \sum_{p<q} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \left(\frac{\partial^2 f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^p \partial x^q} - \frac{\partial^2 f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^q \partial x^p} \right) dx^p \wedge dx^q \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \qquad (**)$$

Now note that our assumption that ω is smooth implies that the functions $f_{i_1 \cdots i_k}$ are smooth (i.e., of class C^∞), because of which we can interchange the order of differentiations of $f_{i_1 \cdots i_k}$. Consequently, the right-hand side of $(**)$ equals 0, which is what we wanted to prove.

必須としたのは以下の項目です．

(a)　$\omega \in \Omega^k(M)$ に対し，M の各チャートで $d(d(\omega|_U)) = 0$ を示すのだという説明
(b)　もし「$\omega|_U$ が $f\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ という形をしている場合のみを考えれば十分」という議論を用いるなら，d の線形性（$C^\infty(U)$ 線形性ではなく $\mathbb{R}$ 線形性）がその根拠であるという説明
(c)　外微分を正しく行うこと．式 $(*)$ の時点で偏微分の順序を取り違えないこと
(d)　偏微分の順序を交換できる根拠の説明

問題は「多様体上の微分形式 ω に対し」です．多様体の話をしていることをきちんと認識し，その認識を読み手に示してください．というわけで (a) がなければ 5 点減点です．(b) がなければ 3 点減点，(c) で誤っていれば 5 点減点ですが，(b)，(c) について重複して減点はしていません．(d) なしは 3 点減点です．

3. $H^1_{\mathrm{dR}}(U) \neq 0$ をみたす $\mathbb{R}^2$ の領域 U の例を挙げ，$H^1_{\mathrm{dR}}(U) \neq 0$ である理由を説明せよ．

We claim that $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ is such a domain in $\mathbb{R}^2$, where 0 denotes the origin.

Let
$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2},$$
which is a differential 1-form on U. A straightforward computation shows that ω is closed. On the other hand, ω is not exact, or equivalently, ω cannot be expressed in the form $\omega = df$ with some function f on U. Suppose to the contrary that $\omega = df$. Then its integral along the path $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ must be zero because
$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega = \int_\gamma df &= \int_\gamma \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\gamma_2}{dt}\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d(f(\gamma(t)))}{dt}\,dt = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = 0,\end{aligned}$$
where $\gamma_i(t)$ denotes the i-th component of $\gamma(t)$. However, we obtain by a direct computation that
$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega = \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} &= \int_0^{2\pi} ((-\sin t)\cdot(\cos t)' + \cos t \cdot (\sin t)')\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0,\end{aligned}$$
which is a contradiction. Therefore, ω is not an exact 1-form, and hence $[\omega]$ is a non-zero element of $H^1_{\mathrm{dR}}(U)$.

この問題に関しては解答はいろいろあり得ます．たとえば，上記と同じ U について，U は S^1 と C^∞ ホモトピー同値であること，および $H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) \neq 0$ であることを示すのでももちろんいいです．

方針が明確に示されていて（たとえば U と閉形式 ω が具体的に述べられており，ω が完全形式でないことを示せばよいと書かれていて）2 点，だいたいできていて 6 点，概ね文句なければ 10 点としました．

ひとつ瑣末ながら重要な注意ですが，「領域」といったら通常は連結開集合のことを指します．「$U = S^1$ でよい」と答えて $H^1(S^1) \neq 0$ を示している人は，（$H^1(S^1) \neq 0$ に関する議論が正しい場合）5 点としてあります．