幾何学 1 演義（松本） 2023 年 12 月 8 日

9 Mayer–Vietoris 完全列 (2)

コチェイン複体の短完全列 $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \to 0$ が誘導する長完全列

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{k-1}(\mathcal{B}) \arrow[r, "g^{\sharp}_{k-1}"] & H^{k-1}(\mathcal{C}) \arrow[dll, "\delta_{k-1}"] \\
H^{k}(\mathcal{A}) \arrow[r, "f^{\sharp}_{k}"] & H^{k}(\mathcal{B}) \arrow[r, "g^{\sharp}_{k}"] & H^{k}(\mathcal{C}) \arrow[dll, "\delta_{k}"] \\
H^{k+1}(\mathcal{A}) \arrow[r, "f^{\sharp}_{k+1}"] & H^{k+1}(\mathcal{B}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

を考える．$H^k(\mathcal{A})$ における完全性は次のような diagram chasing によって示される．（コチェイン複体 $\mathcal{A}$ を構成するベクトル空間を A^k（ただし $k \in \mathbb{Z}$）と書き，線形写像 $A^k \to A^{k+1}$ は $d^{(k)}_{\mathcal{A}}$ などと書かずに単に d で表す．$\mathcal{B}$，$\mathcal{C}$ についても同様とする．）

（$\operatorname{im}\delta_{k-1} \subset \ker f^{\sharp}_k$ の証明）任意に $[\alpha] \in \operatorname{im}\delta_{k-1}$ をとる．im の定義により $[\alpha] = \delta_{k-1}([\gamma])$ と表せる．ただし γ は $d\gamma = 0$ をみたすような C^{k-1} のある元である．

ここで δ_{k-1} の定義を思い出す．$g_{k-1}(\beta) = \gamma$ となる $\beta \in B^{k-1}$ をとり，さらに $f_k(\alpha') = d\beta$ をみたす $\alpha' \in A^k$ をとる．自動的に $d\alpha' = 0$ であることに注意して，$\delta_{k-1}([\gamma]) = [\alpha']$ と定めるのだった．前段落最後の式と合わせて $[\alpha] = [\alpha']$ である．

したがって

$$f^{\sharp}_k([\alpha]) = f^{\sharp}_k([\alpha']) = [f_k(\alpha')] = [d\beta] = 0.$$

すなわち $[\alpha] \in \ker f^{\sharp}_k$ である．

（$\ker f^{\sharp}_k \subset \operatorname{im}\delta_{k-1}$ の証明）任意に $[\alpha] \in \ker f^{\sharp}_k$ をとる．すると $f^{\sharp}_k([\alpha]) = 0$ なのだが，これは $[f_k(\alpha)] = 0$ を意味する．つまり $f_k(\alpha) = d\beta$ をみたす $\beta \in B^{k-1}$ が存在する．

そのような β を一つとって，$\gamma = g_{k-1}(\beta)$ とおく．すると以下で確かめるように $\delta_{k-1}([\gamma]) = [\alpha]$ が成り立ち，ゆえに $[\alpha] \in \operatorname{im}\delta_{k-1}$ という結論がえられる．

そもそも $[\gamma]$ が定義されるためには $d\gamma = 0$ でなければならないのだが，そのことは

$$d\gamma = d(g_{k-1}(\beta)) = g_k(d\beta) = g_k(f_k(\alpha)) = 0$$

によりわかる．$\delta_{k-1}([\gamma]) = [\alpha]$ であることは δ_{k-1} の定義から直ちに従う．

49. 上記の長完全列の $H^k(\mathcal{B})$ における完全性を示せ．

50. 上記の長完全列の $H^k(\mathcal{C})$ における完全性を示せ．［ヒント：しばらく考えてわからなければ，L. W. Tu『トゥー　多様体』（裳華房）定理 25.6 の後の説明をみよ．］

51. 多様体 M 上の微分形式 ω について，その**台** $\operatorname{supp}\omega$ とは $\{\, p \in M \mid \omega_p \neq 0 \,\}$ の M における閉包のことである．

コンパクトな台をもつ微分 k 形式全部からなるベクトル空間を $\Omega_c^k(M)$ で表す．外微分作用素 d は $\Omega_c^k(M)$ を $\Omega_c^{k+1}(M)$ の中に写す[*]．コチェイン複体

$$\cdots \xrightarrow{d} \Omega_c^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^k(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

のコホモロジー群を $H^k_{\mathrm{dR},c}(M)$ と書くことにしよう．これを M の**コンパクト台をもつ de Rham コホモロジー群**という（M がコンパクトなら普通の $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ と同じもの）．

さて，M の開集合 W，$\tilde{W}$ のあいだに包含関係 $W \subset \tilde{W}$ があるとき，$\omega \in \Omega_c(W)$ は，W の外の各点における値を 0 と定めることで $\tilde{\omega} \in \Omega_c(\tilde{W})$ へと「ゼロ拡張」できる．この「ゼロ拡張」を与える線形写像を $\mathrm{ze}_W^{\tilde{W}} \colon \Omega_c(W) \to \Omega_c(\tilde{W})$ で表す．そのとき，

$$\begin{aligned} f_k &\colon \Omega_c^k(U \cap V) \to \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V), &\qquad \alpha &\longmapsto (\mathrm{ze}_{U\cap V}^U(\alpha), -\mathrm{ze}_{U\cap V}^V(\alpha)), \\ g_k &\colon \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \to \Omega_c^k(M), & (\beta_1, \beta_2) &\longmapsto \mathrm{ze}_U^M(\beta_1) + \mathrm{ze}_V^M(\beta_2) \end{aligned}$$

とおけば，

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d, "d"] & \vdots \arrow[d, "d"] & \vdots \arrow[d, "d"] & \\ 0 \arrow[r] & \Omega_c^k(U \cap V) \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "d"] & \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \arrow[r, "g_k"] \arrow[d, "d"] & \Omega_c^k(M) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Omega_c^{k+1}(U \cap V) \arrow[r, "f_{k+1}"] \arrow[d, "d"] & \Omega_c^{k+1}(U) \oplus \Omega_c^{k+1}(V) \arrow[r, "g_{k+1}"] \arrow[d, "d"] & \Omega_c^{k+1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{tikzcd}$$

がコチェイン複体の短完全列となることを示せ．

問題 51 でえられた短完全列に定理 9.1 を適用して $H^k_{\mathrm{dR},c}$ に関する Mayer–Vietoris 完全列を得る．これは具体的な計算に役立つほか，たとえば「Poincaré 双対性」の証明にも用いられる[†]．

次の問題では，Poincaré 双対性の特別な場合にあたる「連結かつコンパクトな n 次元多様体 M について，さらに M が向きづけ可能ならば $H^n_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathbb{R}$ である」という事実を使う（向きづけ可能性の定義は次回与える）[‡]．3 次元実射影空間 $\mathbb{RP}^3$ は向きづけ可能なので，$H^3_{\mathrm{dR}}(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{R}$ である．

52. $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{RP}^3)$ を $0 \leqq k \leqq 3$ について求めよ．ただし $H^3_{\mathrm{dR}}(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{R}$ は既知としてよい．
［ヒント：問題 48 と同様の開集合 U，V に関する Mayer–Vietoris 完全列を用いる．］

---

[*]なぜなら $\operatorname{supp} d\omega \subset \operatorname{supp}\omega$ だから．この包含関係は，$(\operatorname{supp}\omega)^c$ が $\{\, p \in M \mid p$ のある開近傍において $\omega = 0 \,\}$ に等しいことに注意すればわかる．

[†]R. Bott & L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer の第 5 節をみよ．

[‡]同じ前提のもとで，M が向きづけ可能でなければ $H^n_{\mathrm{dR}}(M) = 0$．