

8 Mayer–Vietoris 完全列 (1)

43. (1) ベクトル空間の完全列 $\dots \rightarrow V^{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} V^k \xrightarrow{f_k} V^{k+1} \rightarrow \dots$ について, V^{k-1}, V^{k+1} が有限次元ならば V^k も有限次元で, さらに以下の等式が成り立つことを示せ:

$$\dim V^k = \dim \operatorname{im} f_{k-1} + \dim \operatorname{im} f_k.$$

- (2) 有限次元ベクトル空間の完全列 $0 \rightarrow V^0 \rightarrow V^1 \rightarrow \dots \rightarrow V^n \rightarrow 0$ について, 次元の交代和 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \dim V^k$ は 0 に等しいことを示せ.

ところで一般に, 環 R 上の加群 (左 R 加群でも右 R 加群でもよい) の短完全列 $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ について, 次の条件が成り立つとき, この短完全列は**分解する**ないし**分裂する**という.

- (i) M の部分 R 加群 M' で $M = f(L) \oplus M'$ をみたすものが存在する. (必然的に $g|_{M'}: M' \rightarrow N$ は同型写像となる.)

少し考えると, この条件は次の (ii) と (iii) と同値であることがわかる.

- (ii) f が左逆準同型をもつ (準同型写像 $\tilde{f}: M \rightarrow L$ が存在して $\tilde{f} \circ f = \operatorname{id}_L$ である).
 (iii) g が右逆準同型をもつ (準同型写像 $\tilde{g}: N \rightarrow M$ が存在して $g \circ \tilde{g} = \operatorname{id}_N$ である).

前問の (1) の証明はおそらく (以下のようなことを考えずに解答してもかまわないが), 本質的には「ベクトル空間の場合にはすべての短完全列は分解する」という事実の証明になるだろうと思う. 実際, (1) の完全列からは $0 \rightarrow \operatorname{im} f_{k-1} \rightarrow V^k \rightarrow \operatorname{im} f_k \rightarrow 0$ という短完全列がえられ, これが分解するのならば V^k は $V^k = \operatorname{im} f_{k-1} \oplus V'$ と表され, さらに $V' \cong \operatorname{im} f_k$ となる*.

以下では Mayer–Vietoris 完全列を用いて de Rham コホモロジーを計算する問題を並べる. ここでは「 $H_{\text{dR}}^k(M)$ を求めよ」とは「 $H_{\text{dR}}^k(M)$ のベクトル空間としての同型類を決定せよ」の意味であり, 微分形式を用いて細部まで具体的に記述せよということではない.

44. (1) Mayer–Vietoris 完全列を用いて $H_{\text{dR}}^1(S^1)$ を求めよ.
 (2) 任意の n に対し, $H_{\text{dR}}^k(S^n)$ を $0 \leq k \leq n$ について求めよ.
45. n 次元トーラス T^n の de Rham コホモロジー $H_{\text{dR}}^k(T^n)$ を $0 \leq k \leq n$ について求めよ. ただし $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ 個}}$ である.

*ただし, 「一般に環上の加群の完全列について問題 43 (1) のような等式が成立することを導くためには, 関係する短完全列が分解するという仮定をおくことを避けられない」ということでは全然ない. 整域上の有限生成加群の短完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ について常に $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} L + \operatorname{rank} N$ である (ここで rank とは極大線形独立系 S の元の個数であって, S の選び方によらない).

46. $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ の de Rham コホモロジー $H_{\text{dR}}^k(M)$ を $k = 0, 1, 2$ について求めよ. ただし p_1, p_2, \dots, p_n は \mathbb{R}^2 の相異なる n 点とする.

[ヒント: n 点が一直線上に並んでいる場合は簡単はず. そうでなければどうするか. いずれかの座標軸に平行な直線によって n 個の点を二つのグループに分断できる(なぜか?). なおアイソトピー拡張定理によれば一般の n 点に対する M と一直線上に並んだ n 点に対する M は微分同相だが*, ここではその事実には頼らないこと.]

47. \mathbb{R}^3 の平面 $z = 0$ 上にある原点を中心とする単位円周を C とし, $M = \mathbb{R}^3 \setminus C$ とおく.

(1) M が, \mathbb{R}^3 から 1 本の直線とその上にない 1 点を除いて得られる \mathbb{R}^3 の開集合 N に微分同相であることを示せ. [ヒント: 立体射影を 2 回用いる.]

(2) $H_{\text{dR}}^k(M)$ を $k = 0, 1, 2, 3$ について求めよ.

実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の de Rham コホモロジーを求めるのはなかなか大変だ. $\mathbb{R}P^1$ は S^1 と微分同相だからよいが, 次の $\mathbb{R}P^2$ がすでに難しい. 以下に示すのがひとつの方法である.

複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の場合はどうかということも合わせて考えてみるとよい. 実はそちらのほうが簡単.

48. 実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ を考える. 球面 S^2 からの自然な射影を $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ で表す.

S^2 の赤道 $S^2 \cap \{z = 0\}$ の π による像をここでは $\mathbb{R}P^1$ と書く. $\mathbb{R}P^1$ は $\mathbb{R}P^2$ の部分多様体であって, もちろん S^1 と微分同相である. さらに, 北極 $(0, 0, 1) \in S^2$ の π による像を p_0 と書く.

(1) $U = \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1$, $V = \mathbb{R}P^2 \setminus \{p_0\}$ とおく. 以下の 3 つのことを確かめよ.

(a) U は C^∞ 可縮である. すなわち一点 (のみからなる部分多様体) を C^∞ 変位レトラクトとしてもつ.

(b) V は $\mathbb{R}P^1$ を C^∞ 変位レトラクトとしてもつ. [ヒント: 問題 41.]

(c) $U \cap V$ は S^1 と微分同相な部分多様体を C^∞ 変位レトラクトとしてもつ.

(2) $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}P^2)$ を $k = 0, 1, 2$ について求めよ. [ヒント: Mayer-Vietoris 完全列に現れる $H_{\text{dR}}^1(U) \oplus H_{\text{dR}}^1(V) \rightarrow H_{\text{dR}}^1(U \cap V)$ がどんな写像かを具体的に決定する (実は同型写像である). 問題 36 で $H_{\text{dR}}^1(S^1)$ が $[\alpha]$ を基底としてもつことがわかるので, そのことを用いる.]

種数 g の向きづけ可能な曲面 Σ_g (しばしば「 g 人乗りの浮き輪」といわれる) の場合もやってみるとよいのだろうが, きりがないのでやめる. L. W. Tu 『トウー 多様体』(裳華房) 28.3 節を参照せよ.

絹田村子 『数字であそぼ。』5 巻 (フラワーコミックスアルファ, 小学館) 135 ページに「 \mathbb{R}^3 からどの 2 本も互いに交わらない n 本の直線を除いた空間の de Rham コホモロジーを求めよ」という問題が出てくる. n 本の直線がすべて平行であれば簡単だが, 一般の場合はどう処理すればいいのか私は答えをもっていない. わかったら教えてほしい.

*田村一郎 『微分位相幾何学』(岩波書店) もしくは M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer をみよ.