7 de Rham コホモロジーのホモトピー不変性

37. (1) A と B を位相空間 X の閉集合で $X = A \cup B$ なるものとする．Y を位相空間とし，$f\colon A \to Y$，$g\colon B \to Y$ は連続写像であって $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$ をみたすと仮定する．そのとき，連続写像 $h\colon X \to Y$ で $h|_A = f$，$h|_B = g$ をみたすものがただ一つ存在することを示せ．

    (2) F，G，H を位相空間 X から位相空間 Y への連続写像とする．ホモトピックであるという関係を $\sim$ で表すとき，$F \sim G$ かつ $G \sim H$ ならば $F \sim H$ であることを示せ．

38. F，G，H を多様体 M から多様体 N への C^∞ 級写像とする．C^∞ ホモトピックであるという関係を $\overset{\infty}{\sim}$ で表すとき，$F \overset{\infty}{\sim} G$ かつ $G \overset{\infty}{\sim} H$ ならば $F \overset{\infty}{\sim} H$ であることを示せ*.

    ［ヒント：2 つの C^∞ ホモトピーを単に繋ぎあわせただけでは一般には C^∞ 級写像にならない．まず，C^∞ ホモトピー $\Phi\colon M \times [0,1] \to N$ が与えられたとき，それをうまく修正して $t = 0$，$t = 1$ の近傍で $\Phi(\cdot, t)\colon M \to N$ が定写像となるようにできることを示せ．次のような C^∞ 級関数 $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ があることを用いてよい．(i) 任意の t に対し $0 \leqq \chi(t) \leqq 1$．(ii) ある $\varepsilon > 0$ が存在し，$t < \varepsilon$ では $\chi(t) = 0$，$1 - \varepsilon < t$ では $\chi(t) = 1$.］

問題 37 の結果から，位相空間同士がホモトピー同値であるという関係 $\simeq$ は同値関係である†こと，すなわち以下の 3 条件が成り立つことが従う．(i) 任意の位相空間 X について $X \simeq X$ である．(ii) $X \simeq Y$ ならば $Y \simeq X$．(iii) $X \simeq Y$ かつ $Y \simeq Z$ ならば $X \simeq Z$.

(i)，(ii) は明らかであって，(iii) の証明が問題となる．$F_1\colon X \to Y$，$F_2\colon Y \to Z$ をホモトピー同値写像として，$F = F_2 \circ F_1\colon X \to Z$ がホモトピー同値写像となることを確かめたい．F_1 のホモトピー逆写像 $G_1\colon Y \to X$（$G_1 \circ F_1 \sim \mathrm{id}_X$ および $F_1 \circ G_1 \sim \mathrm{id}_Y$ をみたす写像）と F_2 のホモトピー逆写像 $G_2\colon Z \to Y$ をとる．すると $G = G_1 \circ G_2$ が F のホモトピー逆写像となる．なぜなら，

$$G \circ F = G_1 \circ G_2 \circ F_2 \circ F_1 \sim G_1 \circ \mathrm{id}_Y \circ F_1 = G_1 \circ F_1, \qquad G_1 \circ F_1 \sim \mathrm{id}_X$$

だから問題 37 (2) により $G \circ F \sim \mathrm{id}_X$ であり，同様に $F \circ G \sim \mathrm{id}_Z$ もわかるからである．

まったく同じように，問題 38 の結果から，多様体同士が C^∞ ホモトピー同値であるという関係 $\overset{\infty}{\simeq}$ も同値関係である．

39. X，Y を互いにホモトピー同値な位相空間とする．X が連結ならば Y も連結であることを示せ．

---

*実は多様体のあいだの C^∞ 級写像 F，G について $F \sim G$ と $F \overset{\infty}{\sim} G$ は同値である．J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Springer の Theorem 9.28 を見よ．ただし本問はその事実に頼らずに考えてほしい．

†すべての位相空間からなる集まりが集合ではないことは注意すべきだが，気にせず「同値関係」という言葉を使うことにする．

40.　多様体 M の（埋め込まれた*）部分多様体 N が M の C^∞ **変位レトラクト**（smooth deformation retract）であるとは，C^∞ 級写像 $r\colon M \to N$ であって次の性質をみたすようなものが存在することをいう（このような r を C^∞ **変位レトラクション**という）．ただし $i\colon N \to M$ は包含写像である．

(i)　$r|_N$ は恒等写像 id_N に一致する．（同じことだが，$r \circ i = \mathrm{id}_N$．）

(ii)　$i \circ r$ は恒等写像 id_M に C^∞ ホモトピック．さらに，id_M と $i \circ r$ をつなぐ C^∞ ホモトピー $\Phi\colon M \times [0,1] \to M$ として，任意の $x \in N$，$t \in [0,1]$ に対し $\Phi(x,t) = x$ となるようなものをとれる†．

定義より直ちにわかるように，N が M の C^∞ 変位レトラクトならば $N \overset{\infty}{\simeq} M$ である．

さて，$n < m$ とし，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^m$ の $x^{n+1} = \cdots = x^m = 0$ で定義される部分多様体とみなす．$\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^m$ の C^∞ 変位レトラクトであることを示せ．

41.　(1)　$M = S^1 \times (-1,1)$ において，同値関係 $\sim$ を次のように定める（円周 S^1 を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とみなしている）．

$$(\boldsymbol{x}, t) \sim (\boldsymbol{x}', t') \iff (\boldsymbol{x}', t') = (\boldsymbol{x}, t) \text{ または } (\boldsymbol{x}', t') = (-\boldsymbol{x}, -t).$$

商空間 $M/{\sim}$ を考える（Möbius の帯）．商写像を $\pi\colon M \to M/{\sim}$ と書く．次の写像の各々について，像をそれぞれ U_0，U_1 と書き，ψ_i の終域を U_i に取りかえた写像の逆写像を φ_i と書く（$i = 0$，1）．$M/{\sim}$ にアトラス $\{(U_0, \varphi_0), (U_1, \varphi_1)\}$ を与えることにより $M/{\sim}$ を多様体とみなす．

$$\begin{aligned} \psi_0 &\colon (0,\pi) \times (-1,1) \to M/{\sim}, & (\theta, z) &\longmapsto \pi(((\cos\theta, \sin\theta), z)), \\ \psi_1 &\colon (\pi/2, 3\pi/2) \times (-1,1) \to M/{\sim}, & (\theta, z) &\longmapsto \pi(((\cos\theta, \sin\theta), z)). \end{aligned}$$

$S^1 \times \{0\}$ の π による像を N と書く．N が $M/{\sim}$ の部分多様体であり，N は S^1 に微分同相であることを示せ．

(2)　N が $M/{\sim}$ の C^∞ 変位レトラクトであることを示せ．

42.　$\mathbb{R}^3$ の閉微分 2 形式

$$\omega = (x + e^z)\, dy \wedge dz + xe^z\, dz \wedge dx - z\, dx \wedge dy$$

について，Poincaré の補題によると $\omega = d\eta$ をみたす微分 1 形式 η が存在する．そのような η を具体的に構成せよ．［ヒント：Poincaré の補題の証明をよく検討する．］

---

*M の部分空間としての位相を備えた部分多様体の意．

†この「さらに」以降の条件を課さない場合もある．