6　微分形式の引き戻し

今回以降の問題において，とくに断らないかぎり，S^{n-1} はすべて $\mathbb{R}^n$ の原点を中心とする単位球面とする．

31.　多様体のあいだの写像 $F\colon M \to N$，$G\colon N \to P$ およびそれらの合成 $G \circ F\colon M \to P$ について，対応する微分 k 形式の引き戻し写像をそれぞれ F^*，G^*，$(G \circ F)^*$ とするとき，

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$

であることを示せ．

32.　多様体のあいだの写像 $F\colon M \to N$ および $\omega \in \Omega^k(N)$，$\eta \in \Omega^l(N)$ に対し，

$$F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$$

であることを示せ．

33.　$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $F(x,y) = (x^2+y^2, xy)$ により定める．終域 $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標系を (X,Y) と書くとき，$\omega = dX \wedge dY$ の F による引き戻し $F^*\omega$ を求めよ．

次の問題では，一般に n 次元実ベクトル空間上の交代的な n 重線形形式 $\mu \in \bigwedge^n V^\vee$ について，$\mu \neq 0$ であるためには V の任意の基底 v_1，v_2，……，v_n について $\mu(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq 0$ であることが必要十分であるという事実を用いてよい．

34.　$\mathbb{R}^4$ の微分 1 形式 $\omega = -y\,dx + x\,dy - w\,dz + z\,dw$ を単位球面 S^3 へと引き戻して得られる微分 1 形式 $\omega|_{S^3}$ を θ と書く．θ が S^3 上の接触形式（問題 27）であること，すなわち $\eta = \theta \wedge d\theta \in \Omega^3(S^3)$ が nowhere vanishing であることを確かめたい．

(1)　$\mathbb{R}^4$ において $\tilde{\eta} = \omega \wedge d\omega$ と定める．$\tilde{\eta}|_{S^3} = \eta$ を示せ．

(2)　関数 $h = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ を考える（球面 S^3 は h のレベル集合 $h^{-1}(1)$ である）．$dh \wedge \tilde{\eta}$ が $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ で nowhere vanishing であることを確かめよ（0 は $\mathbb{R}^4$ の原点）．

(3)　η が S^3 で nowhere vanishing であることを結論せよ．

円周 S^1 の微分 1 形式については実感を込めてわかっておきたい．

35.　$\mathbb{R}^2$ の単位円周 S^1 において，$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ で定義される曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \to S^1$ を考える．S^1 上の各点 p に対し，$\gamma(t_0) = p$ なる時刻 t_0 をとり，その時刻における速度ベクトルを

$$X_p = \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=t_0}$$

と書くことにして，ベクトル場 $X = \{X_p\}_{p\in S^1}$ を定義する（与えられた $p \in S^1$ に対し $\gamma(t_0) = p$ をみたす t_0 は一意的でないが，γ が周期 2π をもつことからどの t_0 を採用しても X_p は同じ）．

S^1 上の微分 1 形式 $\alpha = \{\alpha_p\}_{p\in S^1}$ を $\alpha_p(X_p) = 1$ とすることにより定義する（X_p はこの接ベクトル 1 個だけで接空間 T_pS^1 の基底をなすので，$\alpha_p \in T_p^*S^1$ を定めるには X_p に対する値だけを決めればよい）．

(1)　$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ の微分 1 形式

$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

を考える（問題 5）．ω の S^1 への引き戻し $\omega|_{S^1}$ が α に等しいことを示せ．

(2)　$\gamma\colon \mathbb{R} \to S^1$ による α の引き戻し $\gamma^*\alpha$ を求めよ．

36.　$\mathbb{R}^2$ の単位円周 S^1 を考える．$\gamma\colon \mathbb{R} \to S^1$ を前問の曲線とし，その $[0, 2\pi]$ への制限を γ_1 として，線形写像 $I\colon \Omega^1(S^1) \to \mathbb{R}$ を線積分（問題 16）により

$$I(\omega) = \int_{\gamma_1} \omega$$

と定義する．

前問の $\alpha \in \Omega^1(S^1)$ は各点 $p \in S^1$ において $\alpha_p \neq 0$ をみたす．それと $\dim T_p^*S^1 = 1$ であることから，任意の $\omega \in \Omega^1(S^1)$ は，ある $\varphi \in C^\infty(S^1)$ を用いて $\omega = \varphi\alpha$ と表される．このとき上式の右辺を線積分の定義にもとづき書き換えると

$$I(\omega) = \int_0^{2\pi} (\varphi \circ \gamma)(t)\,dt$$

となる．

(1)　$\omega \in \Omega^1(S^1)$ が完全形式ならば $\omega \in \ker I$ であることを示せ．

(2)　逆に，$\omega \in \ker I$ ならば ω は完全形式であることを示せ．［ヒント：もし $\omega = df$ と表されるならば $\gamma^*\omega = d(\gamma^* f) = d(f \circ \gamma)$ となるはずなので，$\gamma^*\omega = dg$ をみたす関数 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ について考察する．］

(3)　$H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \mathbb{R}$ を示せ．