5 多様体上の微分形式 (3)

25. $S = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqq 0\}$ とし，$\mathbb{R}^2$ におけるその補集合を U とする．U において標準的な座標系 (x,y) のほかに極座標系 (r,θ) を考える．ただし $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$．
微分 1 形式 $\omega = f\,dx + g\,dy$ について，$d\omega$ を次の 2 通りの方法で計算し，結果が一致することを確かめよ．(a) そのまま (x,y) に関する局所座標表示を用いて計算する．(b) ω を (r,θ) に関して局所座標表示し，その表示を用いて計算する．

26. $\omega \in \Omega^k(M)$，$\eta \in \Omega^l(M)$ とする．
(1) ω，η がともに閉形式ならば，$\omega \wedge \eta$ も閉形式であることを示せ．
(2) ω，η がともに完全形式ならば，$\omega \wedge \eta$ も完全形式であることを示せ．
(3) ω，η のうち一方が完全形式，もう一方も（完全形式とは限らないが）閉形式であるとき，$\omega \wedge \eta$ は完全形式であるといえるか．

27. 3 次元多様体 M において，微分 1 形式 $\theta \in \Omega^1(M)$ が**接触形式**（contact form）であるとは，$\eta = \theta \wedge d\theta \in \Omega^3(M)$ が nowhere vanishing である*ことをいう．θ を接触形式，f を nowhere vanishing な関数とするとき，$\hat{\theta} = f\theta$ も接触形式であることを示せ．

次の問題で用いる対応 $(x,y,z,w) \longmapsto (u,v,t)$ および $(x,y,z,w) \longmapsto (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{t})$ は立体射影の亜種である．正確に言うと，Cayley 変換を用いて $S^3 \setminus \{1\text{ 点}\}$ を Siegel 上半空間 $D = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Im} w > |z|^2\}$ の $\mathbb{C}^2$ における境界 ∂D に写し，さらに ∂D を Heisenberg 群（とよばれる Lie 群）へと写している†．

28. 3 次元球面 $S^3 = \{\boldsymbol{x} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid |\boldsymbol{x}|^2 = 1\}$ を考える．$U = S^3 \setminus \{(0,0,1,0)\}$，$\tilde{U} = S^3 \setminus \{(0,0,-1,0)\}$ とおき，これらの開集合に，それぞれ次のようにして局所座標系 (u,v,t)，$(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{t})$ を定める：

$$u = \frac{x(1-z) - yw}{(1-z)^2 + w^2}, \qquad v = \frac{y(1-z) + xw}{(1-z)^2 + w^2}, \qquad t = \frac{-2w}{(1-z)^2 + w^2},$$
$$\tilde{u} = \frac{x(1+z) + yw}{(1+z)^2 + w^2}, \qquad \tilde{v} = \frac{y(1+z) - xw}{(1+z)^2 + w^2}, \qquad \tilde{t} = \frac{2w}{(1+z)^2 + w^2}.$$

局所座標系 (u,v,t) は U から $\mathbb{R}^3$ への同相写像を与えている．$(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{t})$ についても同様．
さて，S^3 上の微分 1 形式 θ を，上記のチャートに関する局所座標表示によって

$$\theta|_U = \frac{dt + 2(u\,dv - v\,du)}{(1+u^2+v^2)^2 + t^2}, \qquad \theta|_{\tilde{U}} = \frac{d\tilde{t} + 2(\tilde{u}\,d\tilde{v} - \tilde{v}\,d\tilde{u})}{(1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)^2 + \tilde{t}^2}$$

と定義する．θ が接触形式であることを示せ．

---

*任意の点 $p \in M$ において $\eta_p \neq 0$ をみたすという意味．

†より詳しくは，たとえば D. Jerison & J. M. Lee, The Yamabe problem on CR manifolds, *J. Differential Geom.* **25** (1987), 167–197 の 176 ページ付近を見よ．

次の問題は L. W. Tu『トゥー　多様体』（裳華房）の第 19 節からとった．この問題によると，Maxwell の法則をみたす真空中の電磁場は，時空 $\mathbb{R}^4$ の閉微分 2 形式 F とみなせる．Poincaré の補題によって $F = dA$ をみたす微分 1 形式 A が存在する（電磁ポテンシャル）．A は時空という 4 次元多様体上の主 $U(1)$ 束の接続形式（の局所自明化）と解釈され，その文脈では $F = F_A$ は曲率形式である．A の選び方には自由度があるが，それは主 $U(1)$ 束のゲージ変換によって引き起こされる自由度なのだと理解される（「ゲージ変換」という語をこのように使うのは数学での言葉遣いであって，物理では電磁ポテンシャル A の取りかえ自体をゲージ変換というのだと思う）*.

29.　真空 $\mathbb{R}^3$ における時間変化する電場 $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$，磁場 $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ を考える（$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ は 4 変数 x，y，z，t のベクトル値関数）．電磁気学の基本法則である Maxwell の法則は

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$$

によって与えられる．

さて，上記の $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ をそれぞれ次の微分 1 形式 E，微分 2 形式 B と同一視する：

$$E = E_1\,dx + E_2\,dy + E_3\,dz, \qquad B = B_1\,dy \wedge dz + B_2\,dz \wedge dx + B_3\,dx \wedge dy.$$

これらを座標系 (x, y, z, t) をもつ時空 $\mathbb{R}^4$ の微分形式とみなす．$F = E \wedge dt + B$ とおく（電磁場テンソルもしくは Faraday テンソル）．Maxwell の方程式のうちどの 2 つが条件 $dF = 0$ と同値であるか決定し，同値であることを説明せよ．

最後に，多様体上の外微分作用素 d のひとつの特徴づけを述べよう（したがってこれを d の定義とすることも可能である）．講義の命題 5.1 の証明中に現れる主張に似ているが，M 全体で定義された局所座標系が存在すると仮定していない点が異なることに注意せよ．演習問題とはしたが，証明には 1 の分割を駆使する必要があり，そう簡単ではない．

30.　多様体 M において，次の条件 (i)，(ii)，(iii) が成り立つように各 $k \geqq 0$ に対して線形写像 $D^{(k)}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ が与えられたならば，それは外微分作用素にほかならない（すべての k に対し $D^{(k)} = d^{(k)}$ である）ことを示せ．なお，以下では $D^{(k)}$ ではなく単に D と書く．

(i)　関数（微分 0 形式）f に対して，Df は問題 15 で定義した f の全微分 df.

(ii)　$\omega \in \Omega^k(M)$ と $\eta \in \Omega^l(M)$ に対して $D(\omega \wedge \eta) = D\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge D\eta$.

(iii)　$D^2 = 0$.（つまり $D \circ D = 0$.）

*より詳しくは，中原幹夫『理論物理学のための幾何学とトポロジー II［原著第 2 版］』（日本評論社）第 10 章，茂木勇・伊藤光弘『微分幾何学とゲージ理論』（共立出版）第 4 章（とくに 112 ページから始まる例 1）などを見よ．