4　多様体上の微分形式 (2)

19.　n 次元実ベクトル空間 V 上の双線形形式 $\mu \in \bigotimes^2 V^\vee$ を考える．V の基底を任意に選んで v_1，v_2，……，v_n とし，$\mu(v_i, v_j)$ を第 (i,j) 成分とする $n\times n$ 行列を A とする．

(1)　「μ が交代形式 $\Longleftrightarrow$ A が交代行列」を示せ．

(2)　μ が**非退化**（nondegenerate）であるとは，任意の $v \in V\setminus\{0\}$ に対し，$\mu(v,\cdot)$ が V 上の線形形式として 0 でないことをいう．「μ が非退化 $\Longleftrightarrow$ A が正則行列」を示せ．また，n が奇数のとき V 上に非退化な交代双線形形式は存在しないことを示せ．

20.　V を 4 次元の実ベクトル空間とする．V の基底 v_1，v_2，v_3，v_4 をとり，それに対応する $V^\vee$ の双対基底を α^1，α^2，α^3，α^4 とする．V 上の交代双線形形式

$$\mu = \alpha^1\wedge\alpha^2 + \alpha^3\wedge\alpha^4$$

に対し，$\mu = \beta\wedge\beta'$ となるような β，$\beta' \in V^\vee$ が存在するかどうか判定せよ．

21.　多様体 M のチャート $(U; x^1,\dots,x^n)$ で関数 f^1，……，f^k が与えられているとき

$$df^1\wedge\cdots\wedge df^k = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \frac{\partial(f^1,\dots,f^k)}{\partial(x^{i_1},\dots,x^{i_k})}\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

を示せ（左辺の各 df^j は問題 15 で定義したもので，局所座標表示は問題 4 にあるのと同じ式で与えられる．右辺は $i_1<\cdots<i_k$ をみたすようなすべての $(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,n\}^k$ に関する和である）．

これを用いて講義の命題 3.1 を微分 k 形式に一般化しよう．多様体 M の 2 つのチャート $(U; x^1,\dots,x^n)$, $(\tilde U; \tilde x^1,\dots,\tilde x^n)$ を考える．前問の結論によると，$U\cap\tilde U$ 上で $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ たちと $d\tilde x^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\tilde x^{i_k}$ たちのあいだには

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} = \sum_{j_1<\cdots<j_k} \frac{\partial(x^{i_1},\dots,x^{i_k})}{\partial(\tilde x^{j_1},\dots,\tilde x^{j_k})}\, d\tilde x^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\tilde x^{j_k} \qquad (\star)$$

という関係がある．したがって，微分 k 形式 ω が各々のチャートで

$$\omega|_U = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k}\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}, \qquad \omega|_{\tilde U} = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \tilde f_{i_1\cdots i_k}\, d\tilde x^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\tilde x^{i_k}$$

と局所座標表示されるとき，$U\cap\tilde U$ において係数関数のあいだには

$$\tilde f_{i_1\cdots i_k} = \sum_{j_1<\cdots<j_k} \frac{\partial(x^{j_1},\dots,x^{j_k})}{\partial(\tilde x^{i_1},\dots,\tilde x^{i_k})}\, f_{j_1\cdots j_k} \qquad (\star\star)$$

という関係がある．（さらに以下のとおり命題 3.2 も一般化される：多様体 M のアトラス $\mathcal{S}$ に属する各々のチャート U_λ で微分 k 形式 ω_λ が与えられており，どの 2 つのチャート U_λ，U_μ のあいだにおいても ω_λ，ω_μ の係数関数同士に $(\star\star)$ に示された関係があるとき，すべての λ について $\omega|_{U_\lambda} = \omega_\lambda$ となるような $\omega\in\Omega^k(M)$ が唯一存在する．）

ただし，変換則 (★) や (★★) は主として理論的なものというべきかもしれない．実際の計算では，なるべく微分 1 形式の変換則だけを使うよう心がけるのがよいと思う．つまり $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ を見たら

$$dx^{i_1} = \sum_{j_1=1}^{n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}}\, d\tilde{x}^{j_1}, \qquad \ldots, \qquad dx^{i_k} = \sum_{j_k=1}^{n} \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}}\, d\tilde{x}^{j_k}$$

を代入して整理し直せばいいということである．

22. $\mathbb{R}^3$ の単位球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ を考える．$U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$，$\tilde{U} = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ とおいて，U 上の局所座標系 (u,v)，$\tilde{U}$ 上の局所座標系 $(\tilde{u},\tilde{v})$ を

$$u = \frac{x}{1-z}, \qquad v = \frac{y}{1-z}; \qquad \tilde{u} = \frac{x}{1+z}, \qquad \tilde{v} = \frac{y}{1+z}$$

により定義する（北極 $(0,0,1)$，南極 $(0,0,-1)$ に関する立体射影）．チャート $(U;u,v)$ 上で定義された微分 2 形式

$$\omega = \frac{du \wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2}$$

を，$U \cap \tilde{U}$ において $(\tilde{u},\tilde{v})$ を用いて局所座標表示せよ．

23. $\mathbb{R}^3$ において微分 2 形式 $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$ を考える．半空間 $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$ に

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}, \qquad \varphi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

によって局所座標系 (r,θ,φ) を導入する（θ，φ の値はそれぞれ $(-\pi/2,\pi/2)$，$(0,\pi)$ の範囲にとるものと約束しておく）．ω を U において (r,θ,φ) を用いて局所座標表示せよ．

微分 k 形式の局所座標表示をする際に，$i_1 < \cdots < i_k$ をみたす添字の組だけではなく，$\{1,\ldots,n\}^k$ に属するすべての添字の組を使う方法もあり，場合によっては便利である．$k=2$ の場合を以下で考えよう．通常の局所座標表示に現れる $dx^i \wedge dx^j$（$i<j$）を $\frac{1}{2}(dx^i \wedge dx^j - dx^j \wedge dx^i)$ で置き換えると，微分 2 形式 ω は

$$\omega|_U = \frac{1}{2}\sum_{i_1,\,i_2} g_{i_1 i_2} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}, \qquad \text{ただし } g_{i_2 i_1} = -g_{i_1 i_2} \tag{†}$$

という形に表すことができる．また逆に，$\omega|_U$ を (†) のように表す仕方は一意的である．

24. 多様体 M の 2 つのチャート $(U;x^1,\ldots,x^n)$，$(\tilde{U};\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$ に対し，微分 2 形式 ω が各々のチャートで

$$\omega|_U = \frac{1}{2}\sum_{i_1,\,i_2} g_{i_1 i_2} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}, \quad \omega|_{\tilde{U}} = \frac{1}{2}\sum_{i_1,\,i_2} \tilde{g}_{i_1 i_2} d\tilde{x}^{i_1} \wedge d\tilde{x}^{i_2}, \quad g_{i_2 i_1} = -g_{i_1 i_2},\ \tilde{g}_{i_2 i_1} = -\tilde{g}_{i_1 i_2}$$

と局所座標表示されるとする．そのとき係数関数のあいだには

$$\tilde{g}_{i_1 i_2} = \sum_{j_1,\,j_2} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial \tilde{x}^{i_2}}\, g_{j_1 j_2}$$

という関係があることを示せ．