

3 多様体上の微分形式 (1)

13. 多様体 M の点 p に対し, p の開近傍 U と C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(U)$ の組 (U, f) すべてからなる集合を S_p とする. S_p に次のような関係 \sim を導入する:

$$(U, f) \sim (U', f') \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{点 } p \text{ のある開近傍 } V \subset U \cap U' \text{ が存在して } f|_V = f'|_V.$$

- (1) \sim が同値関係であることを示せ.
- (2) 商集合 $C_p^\infty = S_p / \sim$ を考える (C_p^∞ の元を C^∞ 級関数の点 p における芽という). 接ベクトル $v \in T_p M$ を自然に C_p^∞ を定義域とする写像 $C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ とみなすこともできるが, それはなぜか説明せよ. [ヒント: つまり, 与えられた C_p^∞ の元 s について, s の代表元 (U, f) を任意に選び $\bar{v}(s) = v(f)$ と定めることにすれば, well-defined な写像 $\bar{v}: C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ がえられる. その理由を説明してほしい.]
14. V を n 次元実ベクトル空間, v_1, v_2, \dots, v_n をその基底とし, $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ を双対基底とする. すなわち, 各 α^i は $\alpha^i(v_j) = \delta_j^i$ により定義される V の双対空間 V^\vee の元である*. $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ が実際に V^\vee の基底となっていることを示せ.
15. 多様体 M で定義された (C^∞ 級) 関数 f に対し

$$(df)_p(v) = v(f) \quad (v \in T_p M)$$

と定め, $df = \{(df)_p\}_{p \in M}$ とおく. df が M で定義された (C^∞ 級) 微分 1 形式であることを示せ (問題 4 で定義した df の多様体への一般化. 本問の df も f の微分ないし全微分という).

16. 多様体 M 上の微分 1 形式 ω に対し, 曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ に沿った ω の線積分を

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) dt$$

によって定義する ($\frac{d\gamma}{dt}$ は γ の時刻 t における速度ベクトル). $\omega = df$ のときは

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

であることを示せ (問題 4 の一般化).

* δ_j^i は Kronecker のデルタ. すなわち $i = j$ のとき $\delta_j^i = 1$, それ以外のとき $\delta_j^i = 0$.

17. \mathbb{R}^3 の単位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考える. $f(x, y, z) = z$ とおく (\mathbb{R}^3 上の関数とも思えるが, ここでは S^2 上の関数とみなす). $\omega = df$ によって S^2 上の微分 1 形式 ω を定義する.

ここで S^2 の次のチャート $(U; u, v)$ を考える: $U = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ で

$$u = \frac{x}{1-z}, \quad v = \frac{y}{1-z}$$

とする (北極 $(0, 0, 1)$ に関する立体射影). このチャートを用いて $\omega|_U$ すなわち $df|_U$ を局所座標表示せよ.

18. 前問に引き続き \mathbb{R}^3 の単位球面 S^2 を考える. 前問のチャート $(U; u, v)$ において

$$\eta = \frac{-v du + u dv}{(1+u^2+v^2)^2}$$

で与えられる (U 上の) 微分 1 形式 η を考える. S^2 で定義された微分 1 形式 ω であって $\omega|_U = \eta$ となるようなものが存在するかどうか判定せよ.