2　$\mathbb{R}^n$ 上の微分形式 (2)

7. 　$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で定義された微分 1 形式

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

を考える（問題 5）．$d\omega$ を求めよ．

8. 　$\mathbb{R}^3$ における関数（微分 0 形式）f，微分 1 形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$，微分 2 形式 $\eta = f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$ の外微分 df，$d\omega$，$d\eta$ を求めよ．また，その計算結果と $\mathbb{R}^3$ におけるベクトル解析で用いられる作用素 grad，rot（curl），div との関係について整理し，説明せよ．

9. (1)　$\mathbb{R}^3$ において $\omega = (2+yz^2)\,dx + xz^2\,dy + 2xyz\,dz$ とおく．$d\omega = 0$ を確かめよ．

(2)　(1) の ω に対し，関数 f を次のように定める：

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_\gamma \omega, \qquad \text{ただし } \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = t\boldsymbol{x}.$$

$f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$ を用いて具体的に表し，$df = \omega$ となることを確かめよ．

10. 　微分 1 形式について Poincaré の補題を証明しよう．

$\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^n g_i\,dx_i$ を $\mathbb{R}^n$ の閉微分 1 形式とする．前問の (2) と同じ式（ただし $\mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^n$ でおきかえる）によって f を定義する．線積分の定義を用いて計算すると

$$f(x_1,\dots,x_n) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i g_i(tx_1,\dots,tx_n)\right)dt$$

であるが，この両辺を x_j で偏微分することにより $df = \omega$ を示せ．（右辺については積分記号下の微分を行うことになる．その際，何を確かめればいいか明確に述べること．）

11. $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された微分 1 形式 ω の線積分について考える．ω が完全形式ならば，曲線 γ に沿った ω の線積分の値は γ の始点と終点のみによって定まり，途中の経路にはよらなかった（問題 4）．

本問では ω が閉形式であることのみを仮定する．いずれも始点を $p \in U$，終点を $q \in U$ とする 2 曲線 $\gamma_0\colon [a,b] \to U$，$\gamma_1\colon [a,b] \to U$ があり，これらは互いに C^∞ ホモトピックであるとする*．すなわち次のような C^∞ 級写像が存在するものとする：

$$F\colon [a,b] \times [0,1] \to U,$$
$$F(a,s) = p, \quad F(b,s) = q \quad (0 \leqq s \leqq 1),$$
$$F(\cdot,0) = \gamma_0, \quad F(\cdot,1) = \gamma_1.$$

そのとき $\displaystyle\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$ であることを示せ．

［ヒント：今の段階では次の方法が現実的だろう．$\gamma_s = F(\cdot,s)$ とおく．

$$I(s) = \int_{\gamma_s} \omega$$

が $I'(s) = 0$ をみたすことを，前問と同様に積分記号下の微分を実行して確かめよ．後に別の理解の仕方も示す．］

12. $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された微分 1 形式 ω とベクトル場 X，Y に対し

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

であることを示せ†．

---

*ホモトープともいう．homotopic（英），homotop（独）．なお「ホモトピー同値」は誤った言葉遣い（より詳しくいえば，別の概念を指す表現）なので注意．

†ここで $[X,Y]$ は X，Y の**括弧積**とよばれるベクトル場である．念のため定義を述べておく．

まず，U で定義されたベクトル場 $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ は，次のような写像 $C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ とみなすことができた：

$$f \longmapsto Xf = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

このとき任意のベクトル場 X，Y に対し，$f \longmapsto X(Yf) - Y(Xf)$ で定義される写像 $C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ は，再びあるベクトル場に対応するものになっている．その「あるベクトル場」が括弧積 $[X,Y]$ である．具体的には，$X = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$，$Y = \displaystyle\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ のとき $[X,Y] = \displaystyle\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$ となる．