12 Stokes の定理

65. $\mathbb{R}^n$ において

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x^i\,dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n, \qquad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}$$

とおき（$\widehat{\ }$ はそれを取り除くことを示す），ω を S^{n-1} へと引き戻して得られる微分 $n-1$ 形式を η とする．$\displaystyle\int_{S^{n-1}}\eta$ を Stokes の定理を用いて求めよ．ただし S^{n-1} では $\overline{B}^n$ の標準的な向きから誘導される向きを用いる．

66. M を向きづけられた n 次元閉多様体とする*．

$$H^n_{\mathrm{dR}}(M)\to\mathbb{R}, \qquad [\omega]\longmapsto\int_M\omega$$

が well-defined な線形写像を与えることを示せ．

上記でさらに M は連結であると仮定しておけば，上記の写像は実は線形同型写像である（問題 52 の直前の注意で $H^n_{\mathrm{dR}}(M)\cong\mathbb{R}$ は Poincaré 双対性の特別な場合と書いたが，上記の写像が線形同型写像であることも Poincaré 双対性の主張に含まれている）．

67. M を向きづけられた n 次元閉多様体，N を任意の多様体として，$\omega\in\Omega^n(N)$ を閉形式とする．F，G を互いに C^∞ ホモトピックな M から N への 2 つの写像とするとき，

$$\int_M F^*\omega = \int_M G^*\omega$$

であることを示せ．［ヒント：問題 66 と講義の定理 7.1 を組み合わせる．または，F と G のあいだの C^∞ ホモトピー $\Phi\colon M\times[0,1]\to N$ をとり，$M\times[0,1]$ という境界つき多様体上で $d(\Phi^*\omega)$ を積分する．後者の方針についてより詳しくは松本幸夫『多様体の基礎』（東京大学出版会）定理 20.9 の証明をみよ.］

問題 67 の結果において $M=S^1$ とすれば（さらに問題 61 も念頭におくと），閉微分 1 形式の閉曲線に沿った線積分の C^∞ ホモトピー不変性が得られる．これは問題 11 の多様体版の，さらに閉曲線版である．問題 11 の多様体版そのもの（閉微分 1 形式の曲線 $[a,b]\to M$ に沿った線積分が端点を固定する C^∞ ホモトピーで変わらないこと）は，「角つき多様体に関する Stokes の定理」†を利用すれば証明できる（問題 67 のヒントに挙げた 2 つの方針のうち，2 番目の方針を真似る）．詳細は各自の検討に任せる．

---

*境界をもたないコンパクト多様体のことを，しばしば一言で**閉多様体**（closed manifold）とよぶ．

†J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer の Theorem 16.25.

M を向きづけ可能な連結 n 次元閉多様体とする．そのとき $H^n_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathbb{R}$ なので，任意の（C^∞ 級）写像 $F\colon M \to M$ に対し，線形写像 $F^*\colon H^n_{\mathrm{dR}}(M) \to H^n_{\mathrm{dR}}(M)$ は与えられた $H^n_{\mathrm{dR}}(M)$ の元を定数倍する写像にすぎない．その倍率のことを F の**写像度**といい $\deg(F)$ で表す．実は $\deg(F)$ は整数である．

次元の等しい 2 つの向きづけ可能な連結閉多様体 M，N のあいだの写像 $F\colon M \to N$ についても写像度を定義することができるが，ここでは扱わない．

68. $S^1 \subset \mathbb{C}$ とみて，$F_k\colon S^1 \to S^1$ を $z \longmapsto z^k$ により定める．F_k の写像度を求めよ．［ヒント：問題 35 の α は完全形式ではないので，$[\alpha]$ が $H^1_{\mathrm{dR}}(S^1)$ を生成する．］

69. S^2 を Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ と同一視し，$F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，$F(z) = z^2$ を連続に拡張することにより $F\colon S^2 \to S^2$ を定義する．F の写像度を求めよ．［ヒント：定義域 S^2 は F を通じて終域 S^2 をだいたい 2 重に覆うことから結論は 2 となる．積分を使うのがいいと思う．］

次の問題の (3) はハードな計算を要する．何時間，あるいは何日かかったとしても完遂できたら自信をもってよい．（$\mathbb{CP}^1$ の Fubini–Study 形式について知っていれば計算はだいぶ見通しがよくなる．）

70. $i\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像として

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \cdot i^*(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$$

とおく（係数 $1/4\pi$ は積分が 1 となるようにつけた）．任意の写像 $F\colon S^3 \to S^2$ に対し，$F^*\omega$ は S^3 上の閉 2 形式だから，$H^2_{\mathrm{dR}}(S^3) = 0$ とあわせると，$F^*\omega = d\eta$ をみたす $\eta \in \Omega^1(S^3)$ が存在することがわかる．（η は一意的ではない．）

(1) $H(F) = \displaystyle\int_{S^3} \eta \wedge d\eta$ の値が η の選び方に依存しないことを示せ（**Hopf 不変量**）．

(2) 2 つの写像 F，$G\colon S^3 \to S^2$ が互いに C^∞ ホモトピックならば $H(F) = H(G)$ であることを示せ．［ヒント：両者のあいだの C^∞ ホモトピー $\Phi\colon S^3 \times [0,1] \to S^2$ をとる．Φ を C^∞ 級写像 $S^3 \times \mathbb{R} \to S^2$ に拡張しておき，$\Phi^*\omega = d\tilde{\eta}$ と表す．ここで写像 $\iota_t\colon S^3 \to S^3 \times \mathbb{R}$，$p \longmapsto (p,t)$ を考えると，$F^*\omega = d\iota_0^*\tilde{\eta}$，$G^*\omega = d\iota_1^*\tilde{\eta}$ である．Stokes の定理を用いて $H(G) - H(F)$ を $S^3 \times [0,1]$ における積分として表せ．］

(3) S^3 を $\mathbb{C}^2$ の単位球面とみなして，自然な射影 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^1$ を S^3 に制限したものを F_1 と書く．$\mathbb{CP}^1$ を S^2 と同一視すれば $F_1\colon S^3 \to S^2$ である（**Hopf 写像**）．適当にとった同一視のもとで，F_1 は具体的には

$$F_1(x,y,z,w) = (2(xz + yw), 2(yz - xw), z^2 + w^2 - x^2 - y^2)$$

で与えられる（S^3 を $\mathbb{R}^4$ の部分集合とみて，$\mathbb{R}^4$ の標準座標を用いて書いたのが上の式である）．$H(F_1)$ を求め，F_1 が定値写像に C^∞ ホモトピックではないことを示せ．

なお通常の（連続写像を用いて定義する）ホモトピーがもし存在すれば修正して C^∞ ホモトピーにできるから，F_1 は定値写像にホモトピックでもない．とくに $\pi_3(S^2)$ は自明でない．実は $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ である．