# 11　微分形式の積分

59.　$M$，$N$ を向きづけられた $n$ 次元 $\sigma$ コンパクト多様体とし，$F\colon M \to N$ を向きを保つ微分同相写像とする．任意の $\omega \in \Omega_c^n(N)$ に対し $\displaystyle\int_M F^*\omega = \int_N \omega$ であることを示せ．

60.　$M$，$N$ をそれぞれ $m$ 次元，$n$ 次元の向きづけられた $\sigma$ コンパクト多様体とする．

(1)　$M \times N$ も向きづけ可能な $\sigma$ コンパクト多様体であることを示せ．

(2)　$\pi_1\colon M \times N \to M$，$\pi_2\colon M \times N \to N$ を各成分への射影とし，また $\omega \in \Omega_c^m(M)$，$\eta \in \Omega_c^n(N)$ とする．そのとき $\pi_1^*\omega \wedge \pi_2^*\eta$ もコンパクト台をもち

$$\int_{M\times N} \pi_1^*\omega \wedge \pi_2^*\eta = \left(\int_M \omega\right)\left(\int_N \eta\right)$$

であることを示せ（$M \times N$ の向きは適切に定めること）．

61.　$M$ は多様体，$C$ は $M$ に埋め込まれた部分多様体で，微分同相写像 $F\colon S^1 \to C$ が与えられているとする（$C$ は“$M$ に埋め込まれた円周 $S^1$”である）．曲線 $\gamma\colon [0, 2\pi] \to M$ を $\gamma(t) = F(\cos t, \sin t)$ により定める．そのとき，$M$ の任意の微分 1 形式 $\omega$ に対し

$$\int_C \omega = \int_\gamma \omega$$

であることを示せ（右辺は問題 16 で定義した線積分）．ただし $C$ には $S^1$ の標準的な向きから誘導される向きを与える．

ここからは以下の事実を用いてよい*．

$M$ を向きづけられた $\sigma$ コンパクトな $n$ 次元多様体とし，$\omega \in \Omega_c^n(M)$ とする．$M$ の向きに同調する有限個のチャート $(U_1, \varphi_1)$，……，$(U_k, \varphi_k)$ および $M$ の零集合 $E$ があって，これらがさらに次の条件をみたすとする．ただし $V_i = \varphi_i(U_i)$ と書く．

(i)　各 $U_i$ の $M$ における閉包 $\overline{U}_i$ はコンパクトで，$\partial U_i \subset E$.

(ii)　各 $V_i$ は $\mathbb{R}^n$ の体積確定な（すなわち $\partial V_i$ が零集合であるような）有界開集合で，微分同相写像 $\varphi_i^{-1}\colon V_i \to U_i$ は $\overline{V}_i$ の開近傍で定義された $M$ への $C^\infty$ 級写像に拡張できる．

(iii)　相異なる $i$，$j$ に対し $U_i \cap U_j = \emptyset$.

(iv)　$\operatorname{supp}\omega \subset \overline{U}_1 \cup \cdots \cup \overline{U}_k$.

そのとき $\displaystyle\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{V_i} (\varphi_i^{-1})^*(\omega|_{U_i})$ が成り立つ．

*J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer の Proposition 14.7．なお $E$ が多様体 $M$ の**零集合**であることの定義については，松本幸夫『多様体の基礎』（東京大学出版会）の定義 15.VII をみてもよい．

62. $\mathbb{R}^n$ の原点を中心とする半径 $r$ の球面を $S_r^{n-1}$ で表す．$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ において

$$\omega = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x^i\,dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n, \qquad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}$$

とおき（$\widehat{\ }$ はそれを取り除くことを示す），$\omega$ の $S_r^{n-1}$ への引き戻しを $\eta$ とする．$\displaystyle\int_{S_r^{n-1}} \eta$ を求めよ．$S_r^{n-1}$ の向きは自分で決めること．

問題 62 の構成は次のように一般化される．

$h$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 $U$ で定義された（実数値）$C^\infty$ 級関数とする．その正則値 $c \in \mathbb{R}$ を一つとって $M = h^{-1}(c)$ とおく．$M$ は $U$ に埋め込まれた超曲面（$n-1$ 次元部分多様体）であって，向きづけ可能である（詳しくは次回）．以下簡単のため $M$ は連結であると仮定する．$i\colon M \hookrightarrow U$ を包含写像とする．

任意の点 $p \in M$ に対し，$W$ を $p$ の $U$ における開近傍とし，$\omega \in \Omega^{n-1}(W)$ を

$$dh \wedge \omega = |\mathrm{grad}\, h|\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

をみたす微分 $n-1$ 形式とする．そのとき $i^*\omega \in \Omega^{n-1}(M \cap U)$ は $\omega$ の選び方によらず，したがって $i^*\omega$ を貼り合わせることにより $M$ 全体で定義された微分 $n-1$ 形式 $\eta$ を得る．

さらに $\eta$ は，$h$ を $M = \tilde{h}^{-1}(\tilde{c})$ となるような別の関数 $\tilde{h}$ に取りかえても，$\mathrm{grad}\, h$ と $\mathrm{grad}\, \tilde{h}$ が $M$ の各点で同じ側を向いていれば変わらない．すなわち $\eta$ は，符号が入れ替わる可能性を除き $h$ にも依存しない．

$\eta$ を $M$ の（$\mathbb{R}^n$ への埋め込みから誘導される）**体積形式**という（$n-1=2$ のときは**面積形式**）*．上述のとおり，$\eta$ は符号の違いを除いて一意的に定まる．

63. $a > 1$ とする．$\mathbb{R}^3$ において，$xz$ 平面の円周 $C = \{(x,0,z) \mid (x-a)^2 + z^2 = 1\}$ を $z$ 軸に関して一回転して得られるトーラスを $T$ で表す．$T$ の（$\mathbb{R}^3$ への埋め込みから誘導される）面積形式を $\eta$ とするとき，$\displaystyle\int_T \eta$ を求めよ．$\eta$ の符号および $T$ の向きは自分で決めること．

最後に射影空間の向きづけ可能性を検討する．

64. 問題 62 で述べた構成で得られる単位球面 $S^3 = S_1^3$ 上の微分 3 形式 $\eta$ を考える．また $\pi\colon S^3 \to \mathbb{RP}^3$ を自然な射影とする．

(1) 写像 $\sigma\colon S^3 \to S^3$ を $\sigma(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ で定める．$\sigma^*\eta = \eta$ を示せ．

(2) $\eta = \pi^*\alpha$ をみたす $\mathbb{RP}^3$ 上の微分 3 形式 $\alpha$ が存在することを示せ†．

問題 64 の $\eta$ は問題 34 の $\eta$ と定数倍を除いて同じであり，したがって nowhere vanishing である．$\pi$ が局所微分同相写像であることから $\alpha$ も nowhere vanishing とわかる．ゆえに $\mathbb{RP}^3$ は向きづけ可能．$\mathbb{RP}^n$（$n$ は奇数）も同様に向きづけ可能である．

$\mathbb{RP}^2$ が向きづけ不可能であることは直接確かめられる．松本幸夫『多様体の基礎』（東京大学出版会）301 ページの説明の厳密化を試みよ．微分形式による特徴づけを用いた証明もあるだろうか？

---

*次元にかかわらず$\overline{\text{超曲面}}$の最高次微分形式であることを強調して「面積形式」とよぶことも多いように思われる．

†この状況を指して「$\eta$ は $\mathbb{RP}^3$ 上の微分 3 形式へと descend する」という言い方をよくする．