10　1 の分割

53.　関数 $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，$t > 0$ では $\chi(t) = e^{-1/t}$ とし，$t \leqq 0$ では $\chi(t) = 0$ とすることにより定義する．χ が $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数であることを示せ．

54.　$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合は σ コンパクトである．そのことを示せ．

$\mathbb{R}^n$ は開球 $B(0, i)$ たちの可算和として $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^\infty B(0, i)$ と表せるが，次の問題でみるように，一般の σ コンパクト多様体についても同じような表し方ができる．

55.　M を σ コンパクトな多様体とする．

(1)　M のコンパクト部分集合の増大列 $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ で $\bigcup_{i=1}^\infty K_i = M$ をみたすものが存在することを示せ．

(2)　次の 3 条件をみたす M の開集合の増大列 $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ が存在することを示せ．

(i)　各 $i = 1$，2，3，……について，B_i の M における閉包 $\overline{B}_i$ はコンパクト．

(ii)　各 $i = 1$，2，3，……について，$\overline{B}_i \subset B_{i+1}$．

(iii)　$\displaystyle\bigcup_{i=1}^\infty B_i = M$．

［ヒント：(1) の $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ をとり，以下のように帰納的に B_i を構成せよ．まず K_1 を M の相対コンパクトな有限個の開集合で覆って，それらの開集合たちの和集合を B_1 と定める．次に $K_2 \cup \overline{B}_1$ について同様の手続きを行い B_2 をつくる．……］

関連してパラコンパクト性の概念を紹介しておく．1 の分割の存在定理は，本来はパラコンパクト多様体について述べてもよいのだが，話をむやみに難しくしないために σ コンパクト多様体の場合に限った．気になる人は yamyamtopo 氏による「パラコンパクト性をめぐって」をみよ*.

56.　σ コンパクトな多様体 M は**パラコンパクト**であることを示せ．すなわち，M の任意の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ について，その細分になっている†ような M の局所有限な開被覆 $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ が存在することを示せ．

［ヒント：前問 (2) の $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ をとる．各 $\overline{B}_i$ はコンパクトだから有限部分集合 $A_i \subset A$ が存在して $\overline{B}_i \subset \bigcup_{\alpha\in A_i} U_\alpha$ である．各 $\alpha \in A_i$ に対し $V_{i,\alpha} = U_\alpha \cap (M \setminus \overline{B}_{i-1})$ と定める（ただし $\overline{B}_0 = \emptyset$ としておく）．$V_{i,\alpha}$ たちをすべての α，i について集めて $\mathcal{V}$ とする．］

---

*https://yamyamtopo.wordpress.com/2015/12/19/パラコンパクト性-pdf/

†各 $\beta \in B$ について，ある $\alpha \in A$ が存在して $V_\beta \subset U_\alpha$ であるということ．

問題 57，問題 58 で講義の定理 10.1 の証明を与える．

それに先立ち，次のような準備をしておこう．σ コンパクト多様体 M について，問題 55 (2) で存在を証明した $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ をとる．$S_i = \overline{B}_i \setminus B_{i-1}$ とおく（ただし $B_0 = \emptyset$ と定めておく）*．各 S_i はコンパクトで $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = M$ である．また各 S_i の開近傍として $\tilde{S}_i = B_{i+1} \setminus \overline{B}_{i-2}$ をとる（$B_{-1} = \emptyset$ と定める）．$\{\tilde{S}_i\}_{i=1}^{\infty}$ は M の局所有限な開被覆である（なぜか？）．

57. M を σ コンパクトな多様体とし，$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を M の開被覆とする．そのとき，さらに M の 2 つの開被覆 $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$，$\mathcal{W} = \{W_\beta\}_{\beta\in B}$ を，次の 3 条件が成り立つようにとれることを示せ．（以下で上線は M における閉包を示す．）
    (i) 各 $\beta \in B$ について，$\overline{W}_\beta \subset V_\beta$ で，さらにある $\alpha \in A$ が存在して $\overline{V}_\beta \subset U_\alpha$.
    (ii) 各 $\beta \in B$ について，$\overline{V}_\beta$ はコンパクト（したがって $\overline{W}_\beta$ もコンパクト）．
    (iii) $\mathcal{V}$ は局所有限（したがって $\mathcal{W}$ も局所有限）．

    ［ヒント：問題の直前で用意した状況設定を用いる．各 S_i について，開集合 $V_{i,j}$，$W_{i,j}$（$j = 1$，2，……，N_i）を次がみたされるようにとれ．
    (a) $\overline{W}_{i,j} \subset V_{i,j}$ かつ $\overline{V}_{i,j}$ はコンパクト．
    (b) $\overline{V}_{i,j} \subset \tilde{S}_i$ である．さらに，$\overline{V}_{i,j}$ はいずれかの U_α に含まれる．
    (c) $\{W_{i,j}\}_{j=1}^{N_i}$ は S_i を被覆している．
    それができたら，$V_{i,j}$ たちを全部集めたものを $\mathcal{V}$ とし，また $W_{i,j}$ たちを全部集めたものを $\mathcal{W}$ とすればよい．］

U を多様体 M の開集合，K をコンパクトな U の部分集合とするとき，M 全体で $h \geqq 0$ をみたす関数 $h \in C^\infty(M)$ であって，K 上では $h > 0$，かつ $\operatorname{supp} h \subset U$ であるようなものが存在する．これは問題 53 の関数 χ を用いて構成されるのだが†，ここではそのような関数の存在を認めてしまって次に進み，1 の分割の存在証明を完結させよう．

58. M を σ コンパクトな多様体とし，$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を M の開被覆とする．
    (1) M 上の 1 の分割 $\{\rho_\beta\}_{\beta\in B}$ であって，各 $\operatorname{supp}\rho_\beta$ はコンパクトで，さらに各 $\beta \in B$ についてある $\alpha \in A$ が存在して $\operatorname{supp}\rho_\beta \subset U_\alpha$ をみたすようなものが存在することを示せ．［ヒント：問題 57 の結果を用いる．］
    (2) $\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割が存在することを示せ．［ヒント：写像 $s\colon B \to A$ を各 $\beta \in B$ に対し $\operatorname{supp}\rho_\beta \subset U_{s(\beta)}$ となるように定める（選択公理）．各 $\alpha \in A$ に対し，$\sum_{\beta\in s^{-1}(\alpha)} \rho_\beta$ をあらためて ρ_α と書く．］

なお，問題 58 (1) の $\{\rho_\beta\}_{\beta\in B}$ のようなものも「$\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割」とよぶ場合もある．われわれはそのような言葉遣いを採用しなかった．

---

*S は shell の頭文字のつもり．

†松本幸夫『多様体の基礎』（東京大学出版会）補題 14.2.