幾何学 1（担当：松本）期末試験

2024 年 2 月 2 日（金）実施（120 分）

以下の問題に答えよ．多様体や微分形式はつねに C^∞ 級のものだけを考える．de Rham の定理は使わずに済むように出題したつもりだが，使ってもよい．第 1 問，第 2 問の「アトラス」，「チャート」はそれぞれ「（局所）座標近傍系」，「（局所）座標近傍」と同義である．

第 5 問，第 6 問については，厳密な論証ができなくてもアイデアを述べようと努めること．

1. M を Hausdorff 空間とする．M の C^∞ 級アトラスとは何か説明せよ．

2. S^2 を $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする単位球面とし，$\mathbb{R}^3$ 上の微分 2 形式 $\omega = dy \wedge dz$ を S^2 へと引き戻したものを η と書く．S^2 の開集合 $U = \{\, (x, y, z) \in S^2 \mid z > 0 \,\}$ において，局所座標系 (u, v) を $u = x$，$v = y$ によって定める．チャート $(U; u, v)$ における η の局所座標表示を求めよ．

3. 多様体 M 上に微分 k 形式 ω，ω' があり，これらは同一の de Rham コホモロジー類に属している（いいかえると $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ の二つの元 $[\omega]$，$[\omega']$ は等しい）と仮定する．そのとき，N を M の向きづけ可能なコンパクト k 次元部分多様体とすれば
$$\int_N \omega = \int_N \omega'$$
が成り立つ（N にはどのような向きを与えてもよい．ただし，左辺と右辺で異なる向きを採用したりはせず，同じ向きを用いる）．理由を Stokes の定理にもとづき説明せよ．

4. M，N を多様体とする．さらにいずれも空集合ではないと仮定する．0 以上の整数 k について，$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$ ならば $H^k_{\mathrm{dR}}(M \times N) \neq 0$ であることを示せ．

5. $\mathbb{R}^4$ の原点を中心とする単位球面 S^3 において，二つの円周
$$C_1 = \{\, (x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}, \qquad C_2 = \{\, (0, 0, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z^2 + w^2 = 1 \,\}$$
を考える．$M = S^3 \setminus (C_1 \cup C_2)$ の de Rham コホモロジー群 $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ を各 k について求めよ．ただし S^1，S^2 の de Rham コホモロジー群は既知としてよい．

6. $\mathbb{R}^2$ 上のすべての回転不変な C^∞ 級関数および微分 1 形式からなるベクトル空間を，それぞれ $C^\infty_{S^1}(\mathbb{R}^2)$，$\Omega^1_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ で表そう（ここでは S^1 は単に回転を象徴する記号として用いられている）．すなわち，$R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を原点を中心とする角 θ の回転として
$$C^\infty_{S^1}(\mathbb{R}^2) = \{\, f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \mid \text{任意の } \theta \in \mathbb{R} \text{ に対し } f \circ R_\theta = f \,\},$$
$$\Omega^1_{S^1}(\mathbb{R}^2) = \{\, \omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2) \mid \text{任意の } \theta \in \mathbb{R} \text{ に対し } R_\theta^* \omega = \omega \,\}$$
と定義する．$\Omega^1_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ に属する任意の閉形式は，ある $f \in C^\infty_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ の外微分 df に一致することを示せ．