期末試験の解答例・採点覚え書き

2 月 2 日に実施した期末試験の解答例を掲げ，どんな方針で採点をしたか説明します．

配点は，前半 3 問を各 15 点，後半 3 問を各 25 点としました．第 1 問はすべての大前提で，第 2 問・第 3 問はほぼ講義で説明したことです．第 4 問は，問われていることを定義にもとづき素直に考えてみればよいという種類の問題だと思います．第 5 問・第 6 問では非自明な発想が必要でしょう．

第 1 問から第 4 問については解答例を細かく書きます．第 5 問・第 6 問については何通りかの略解を挙げることにします．

1. M を Hausdorff 空間とする．M の C^∞ 級アトラスとは何か説明せよ．

［解］M の C^∞ 級アトラスとは，$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ という族であって，（ある非負整数 n について）次の性質をみたすようなもののことである．

(i) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M の開被覆である．（つまり，各 U_λ は M の開集合で $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = M$.）

(ii) 各 φ_λ は U_λ から $\mathbb{R}^n$ の開集合 V_λ への同相写像である．

(iii) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ をみたす任意の λ，$\mu \in \Lambda$ に対して，

$$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} \colon \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

は C^∞ 級写像である．

(i)，(ii)，(iii) の各々について 5 点ずつとしました．

(ii) について，V_λ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることが欠けている場合は，5 点のうち 3 点減点としています．φ_λ が（C^∞ 級）微分同相写像であるとしている答案も 3 点減点としました（この時点では U_λ は単なる Hausdorff 空間の開集合であり，φ_λ が微分同相写像であるという主張は意味をなしません）．各 φ_λ を U_λ から $\mathbb{R}^n$ への同相写像としているものは 5 点減点です（論理的にはそのようなチャートだけを許す立場も筋は通っていますが，特殊な目的がないかぎりそのような定義はしないので，今回は許容しません）．

(iii) では，$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$ が C^∞ 級写像であることが重要なのであって，それが無ければ 5 点減点です．$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$ の定義域・終域の認識が誤っているもの（およびまったく書かれていないもの）は 3 点減点とします．図で示すもの，定義域しか書いていないものは許容しました．「$U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ をみたす」は書かなくてもかまいません．

冒頭の「ある非負整数 n について」には言及しなくてもよいものとしました．(iii) の $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$ はより詳しく書けば $\varphi_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu} \circ (\varphi_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu})^{-1}$ ですが，そこまで細かく書くことは求めません．

2. 　S^2 を $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする単位球面とし，$\mathbb{R}^3$ 上の微分 2 形式 $\omega = dy \wedge dz$ を S^2 へと引き戻したものを η と書く．S^2 の開集合 $U = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ において，局所座標系 (u, v) を $u = x$，$v = y$ によって定める．チャート $(U; u, v)$ における η の局所座標表示を求めよ．

［解］包含写像 $i\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ をチャート $(U; u, v)$ を用いて局所座標表示する（$\mathbb{R}^3$ では標準座標系を用いる）と $(u, v) \longmapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ となる．したがって，引き戻し $\eta = i^*\omega$ の $(U; u, v)$ における局所座標表示は

$$dv \wedge d(\sqrt{1 - u^2 - v^2}) = dv \wedge \left(\frac{-u\,du - v\,dv}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \right) = \frac{u\,du \wedge dv}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}.$$

「$dv \wedge d(\sqrt{1 - u^2 - v^2})$ を計算すればよい」という認識までで 9 点，残りの計算に 6 点としました．

前半（9 点）において，包含写像の局所座標表示 $(u, v) \longmapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ を書いたところまでで 4 点与えています．ただしそれを明示的に書いていなくても，さらに先に続く場合，筋が通っていればとくに問題とはしていません．

後半（6 点）では，$d(\sqrt{1 - u^2 - v^2})$ を du，dv を用いて正しく書くところまでで 3 点与えました．

なお特殊ケースとして，「$dv \wedge d(\sqrt{1 - u^2 - v^2})$」を書く段階でうっかり dv を du と取り違えているものは全体から 5 点減点としました．

3.　多様体 M 上に微分 k 形式 ω，ω' があり，これらは同一の de Rham コホモロジー類に属している（いいかえると $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ の二つの元 $[\omega]$，$[\omega']$ は等しい）と仮定する．そのとき，N を M の向きづけ可能なコンパクト k 次元部分多様体とすれば

$$\int_N \omega = \int_N \omega'$$

が成り立つ（N にはどのような向きを与えてもよい．ただし，左辺と右辺で異なる向きを採用したりはせず，同じ向きを用いる）．理由を Stokes の定理にもとづき説明せよ．

［解］仮定より $\omega' - \omega = d\eta$ をみたす $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ をとれる．すると

$$\int_N \omega' - \int_N \omega = \int_N d\eta$$

となる．右辺が 0 に等しいことを示せばよい．ここで右辺は正確には包含写像 $i\colon N \to M$ を用いて

$$\int_N i^*(d\eta)$$

と書くべきものであるが，$i^*(d\eta) = d(i^*\eta)$ であって，したがって Stokes の定理により

$$\int_N d\eta = \int_N i^*(d\eta) = \int_N d(i^*\eta) = \int_{\partial N} i^*\eta \tag{$\star$}$$

が成り立つ．ところで N は多様体であるから，境界つき多様体とみたときの境界 ∂N は空集合で，ゆえに $(\star)$ の最後の積分は 0 に等しい．これで証明が完成した．

$\omega' - \omega = d\eta$ をみたす η が存在することを指摘して 6 点，残りについて 9 点としました．

上記の解答例にあるように $\int_N d\eta$ を $\int_N i^*(d\eta)$ と書かずに，単に「$\int_N d\eta = \int_{\partial N} \eta$ である」として計算していても減点はしていません．ただし，このように略記しても問題が起こらないのは引き戻し i^* と外微分 d が交換可能だからこそだ，ということを認識しておいてください．

後半（9 点）について，$\int_N d\eta = \int_{\partial N} i^*\eta$ ないし $\int_N d\eta = \int_{\partial N} \eta$ という式を書いたところで止まっているものは，9 点のうち 3 点のみ加点しています．

なお，問題で N がコンパクトであると仮定しているのは，任意の $\omega \in \Omega^k(M)$ について積分 $\int_N \omega$ が意味をもつようにするためであって，$\partial N = \emptyset$ であることとは無関係です．

4.　M, N を多様体とする．さらにいずれも空集合ではないと仮定する．0 以上の整数 k について，$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$ ならば $H^k_{\mathrm{dR}}(M \times N) \neq 0$ であることを示せ．

［解］仮定 $H^k_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$ により，M の閉微分 k 形式であって完全ではないものが存在する．そのようなものを一つとって ω とおく．第 1 成分への射影 $\pi\colon M \times N \to M$, $(p,q) \longmapsto p$ による引き戻し $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ を考えると，ω は閉形式なので

$$d\tilde{\omega} = \pi^*(d\omega) = 0,$$

すなわち $\tilde{\omega}$ も閉形式である．あとは $\tilde{\omega}$ が $M \times N$ の完全形式ではないことを確かめられれば，$H^k_{\mathrm{dR}}(M \times N) \neq 0$ が従うことになる．

背理法を用いる．$\tilde{\omega}$ が完全形式であると仮定し，$M \times N$ 上のある微分 $k-1$ 形式 $\tilde{\eta}$ を用いて $\tilde{\omega} = d\tilde{\eta}$ と表す．N が空集合でないことを用いて，任意に点 $q_0 \in N$ をとって固定し，写像 $i\colon M \to M \times N$ を $i(p) = (p, q_0)$ によって定義する．このとき

$$i^*\tilde{\omega} = i^*\pi^*\omega = (\pi \circ i)^*\omega = \omega$$

が成り立つ（最後の等号は $\pi \circ i = \mathrm{id}_N$ による）．したがって，$\tilde{\omega} = d\tilde{\eta}$ の両辺を i で引き戻すことにより $\omega = i^*d\tilde{\eta} = d(i^*\tilde{\eta})$ を得る．しかしこれは ω が完全形式でないことに矛盾する．

M の閉微分 k 形式であって完全ではないもの ω をとって 5 点，$\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ が閉形式であることを指摘して 5 点，$\tilde{\omega}$ が完全形式でないことを証明して 15 点です．（対偶「$H^k_{\mathrm{dR}}(M \times N) = 0$ ならば $H^k_{\mathrm{dR}}(M) = 0$」を証明しようとする人もいました．採点は同様に行っています．）

はじめの 10 点に相当する部分は，次のように述べることもできるでしょう．「第 1 成分への射影 $\pi\colon M \times N \to M$ は de Rham コホモロジー群のあいだの写像 $\pi^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M \times N)$ を誘導する．$[\omega] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ を 0 でない元として，$\pi^*([\omega])$ すなわち $[\pi^*\omega]$ が $H^k_{\mathrm{dR}}(M \times N)$ の 0 でない元であることを示せばよい．」この書き方では $\pi^*\omega$ が閉形式となることを一般論から当然のこととしており，あらためて証明してはいませんが，本問ではそれで問題ないと思います．

$\tilde{\omega}$ が完全形式でないことの証明（15 点）中で，$i\colon M \to M \times N$ を「包含写像」とか「自然な単射」などと呼んでいる人が多くいました．$M \subset M \times N$ というわけではないので包含写像ではないし（$M \times \{q_0\}$ を M と同一視すると宣言すれば別ですが），自然な単射もありません（i は点 $q_0 \in N$ を選んで初めて定義される写像であることに注意してください）．この場合，別途 $i(p) = (p, q_0)$ などと定義式を書いているのでないかぎり，5 点減点しています．

「なぜわざわざ M, N は空集合でないと仮定しているのか」という点にも注意を払ってほしいところです．「仮定をどこで用いたか」は証明を振り返る際の重要なチェック項目です．

5. $\mathbb{R}^4$ の原点を中心とする単位球面 S^3 において，二つの円周

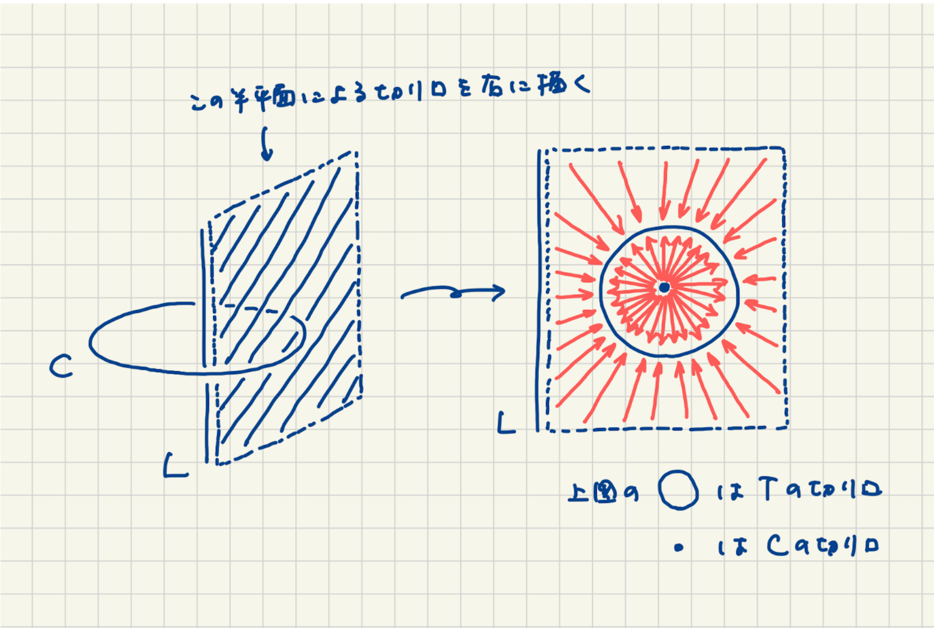
$$C_1 = \{(x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \qquad C_2 = \{(0, 0, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z^2 + w^2 = 1\}$$

を考える．$M = S^3 \setminus (C_1 \cup C_2)$ の de Rham コホモロジー群 $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ を各 k について求めよ．ただし S^1，S^2 の de Rham コホモロジー群は既知としてよい．

［略解 1］点 $(0, 0, 0, 1)$ に関する立体射影により，M は $\mathbb{R}^3$ から次の円周 C と直線 L を除いて得られる空間 $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup L)$ と微分同相であることがわかる：

$$C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \qquad L = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

ここで $\mathbb{R}^3$ の xz 平面内の円周 $(x-1)^2 + z^2 = 1/4$，$y = 0$ を z 軸の周りに一回転してできるトーラス T を考えると，T は $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup L)$ の変位レトラクトになっている．



以上から $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ は $H^k_{\mathrm{dR}}(T)$ と同型である．Mayer–Vietoris 完全列を用いるなどして*計算することにより

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(T) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0,\ 2), \\ \mathbb{R}^2 & (k = 1), \\ 0 & (k \geqq 3). \end{cases}$$

*Künneth の公式を用いる手もあります．演習で触れたいと考えていましたがそのチャンスが訪れませんでした．

［略解 2］S^3 の開集合 $U = S^3 \setminus C_1$，$V = S^3 \setminus C_2$ を考えると $S^3 = U \cup V$，$M = U \cap V$ である．Mayer–Vietoris 完全列を用いて $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ を求めよう．$H^k_{\mathrm{dR}}(S^3)$ は容易に求められる．一方で，U，V は立体射影を用いることによりいずれも $\mathbb{R}^3$ から直線を除いて得られる空間と微分同相であり，円周がその変位レトラクトになっているから，

$$H^k_{\mathrm{dR}}(U) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(V) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0,\ 1), \\ 0 & (k \geqq 2). \end{cases}$$

以上のことを用いて $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ を求めることができる．

［略解 3］立体射影に頼らずに，M とトーラス $T = S^1 \times S^1$ がホモトピー同値であることを直接証明してみる．各 $t \in (0,1)$ に対し

$$T_t = \{\, (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1 - t,\ z^2 + w^2 = t \,\}$$

とおけば $M = \displaystyle\bigsqcup_{t \in (0,1)} T_t$（非交和）となっている．各々の T_t と T のあいだには

$$F_t \colon T_t \to T, \qquad (x, y, z, w) \longmapsto \left(\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}, \frac{y}{\sqrt{1-t}} \right), \left(\frac{z}{\sqrt{t}}, \frac{w}{\sqrt{t}} \right) \right)$$

という微分同相写像がある．これを用いて，$F \colon M \to T \times (0,1)$ という写像を，$p \in T_t$ のとき $F(p) = (F_t(p), t)$ と定めることで定義しよう．すると F は実は微分同相写像になっている．$T \times (0,1)$ は T とホモトピー同値だから，M と T もホモトピー同値であることがわかった．あとは略解 1 と同じ．

S^3 は目には見えないですね．目に見える状況にするために初手で立体射影を利用したのが略解 1 で，この解法を主に想定していました．略解 2 の方法は出題前には真面目に考えていなかったのですが，これを念頭におくと，S^3 の de Rham コホモロジー群も既知としてよいと約束しておけばよかったです．

- 略解 1 の方法を採用した場合，M が $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup L)$ と微分同相であることを正しく導いて 5 点，トーラスが変位レトラクトになっていることを（厳密な根拠はともかく）述べて 10 点，その厳密な理由づけと最終的な計算を完遂して 10 点です．
- 略解 2 の方法を採用した場合，U，V を適切に設定し，正しい Mayer–Vietoris 完全列を書いて 5 点，$H^k_{\mathrm{dR}}(S^3)$ および $H^k_{\mathrm{dR}}(U)$，$H^k_{\mathrm{dR}}(V)$ の正しい計算結果を述べて 10 点（この段階で厳密な根拠は問わない），以上の理由を厳密に述べ，最終的な計算を完遂して 10 点です．
- 略解 3 に近い方法を採用した人は 1 人でした．M を T_t たちの非交和とみなして 5 点，M が $T \times (0,1)$ に微分同相であることを（厳密な根拠はともかく）述べて 10 点，その厳密な理由づけと最終的な計算を完遂して 10 点です．

なお，$H^0_{\mathrm{dR}}(M)$ は比較的簡単にわかります．十分な根拠とともに $H^0_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathbb{R}$ を結論していれば 5 点を与えました（この 5 点は，上記の各々の基準における最後の 10 点に含まれるものと解釈します）．とくに何も説明せず「$S^3 \setminus (C_1 \cup C_2)$ は連結なので $H^0_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathbb{R}$」とだけ述べている場合は不可としています．

6.　$\mathbb{R}^2$ 上のすべての回転不変な C^∞ 級関数および微分 1 形式からなるベクトル空間を，それぞれ $C^\infty_{S^1}(\mathbb{R}^2)$，$\Omega^1_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ で表そう（ここでは S^1 は単に回転を象徴する記号として用いられている）．すなわち，$R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を原点を中心とする角 θ の回転として

$$C^\infty_{S^1}(\mathbb{R}^2) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \mid \text{任意の } \theta \in \mathbb{R} \text{ に対し } f \circ R_\theta = f \},$$
$$\Omega^1_{S^1}(\mathbb{R}^2) = \{ \omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2) \mid \text{任意の } \theta \in \mathbb{R} \text{ に対し } R_\theta^* \omega = \omega \}$$

と定義する．$\Omega^1_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ に属する任意の閉形式は，ある $f \in C^\infty_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ の外微分 df に一致することを示せ．

まず，思いつくのは容易ではないでしょうが，以下の考え方は有用です．

［略解 1］$\Omega^1_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ に属する閉形式を任意にとり ω とおく．Poincaré の補題によれば，$\omega = df$ をみたす $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ をとることができる．このとき $f \circ R_\theta$ についても同じく

$$d(f \circ R_\theta) = d(R_\theta^* f) = R_\theta^* df = R_\theta^* \omega = \omega \tag{$\star$}$$

である．そこで $f \circ R_\theta$ を「平均化」して得られる関数

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f \circ R_\theta)(x,y)\, d\theta$$

を考えよう．この g は回転不変な C^∞ 級関数である．さらに，積分記号下の微分ができる状況になっており，

$$dg = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(f \circ R_\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\omega = \omega$$

が（上記の式変形はあまり一般的とはいえない書き方ではあるが）成り立つ．

$df = \omega$ を未知関数 f についての微分方程式とみなしたとき，一つの解 f から別の解を生む操作があって（R_θ による引き戻し），しかも左辺 df が f について線形だから，平均も解になるというわけです．

最後の計算は，たとえば次のような計算の一つの書き表し方だと読めばよいです．まず準備として $\omega = \varphi\, dx + \psi\, dy$ としておきます．積分記号下の微分によって

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial (f \circ R_\theta)}{\partial x}\, d\theta, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial (f \circ R_\theta)}{\partial y}\, d\theta$$

ですが，ここで式 ($\star$) から $\partial(f \circ R_\theta)/\partial x = \varphi$，$\partial(f \circ R_\theta)/\partial y = \psi$ なので

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varphi = \varphi, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\psi = \psi$$

が従うことがわかります．すなわち $dg = \omega$ です．

次の解法は以下の考えに基づくものです．そもそも方程式 $\omega = df$ をみたす f には，定数を加える分の自由度しかありません（$\omega = df = dg$ ならば $d(f-g)=0$ だから）．仮に問題文が主張するとおり $C^\infty_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ に属する解 g が存在するのならば，Poincaré の補題を用いてとった $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に属する解 f も，g との差が定数である以上，必然的に回転不変でなければならないはずです．

［略解 2］$\Omega^1_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ に属する閉形式を任意にとり ω とおく．Poincaré の補題に基づき $\omega = df$ をみたす $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ をとる．このとき，θ の値によらず

$$d(f \circ R_\theta - f) = d(R_\theta^* f) - df = R_\theta^*\omega - \omega = \omega - \omega = 0$$

なので，$f \circ R_\theta - f$ は $\mathbb{R}^2$ 上の定数関数である．さらに原点では明らかに $(f \circ R_\theta)(0,0) = f(0,0)$ なので，結局 $f \circ R_\theta = f$ が $\mathbb{R}^2$ 全体で恒等的に成り立たなければならない．任意の θ についてそうなのだから，f は回転不変な関数だったことがわかる．

次は知識に基づく解法です．

［略解 3］Poincaré の補題の証明，もしくは演義の問題 10 によると，

$$f(x,y) = \int_\gamma \omega, \qquad \text{ただし}\ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (tx, ty)$$

とおくと $\omega = df$ が成立する．この f が回転不変であることを確かめるのは容易である．

最後に，面倒で，しかもかなり難しい証明を要する事実を一箇所で用いますが，それでももっとも素直といえそうな解法を説明します．

［略解 4］$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ において

$$dr = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad d\theta = \frac{-y\,dx + x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

とおく．dr は $r = \sqrt{x^2+y^2}$ の外微分に等しく，一方で $d\theta$ は関数の外微分になっているわけではないことに注意せよ．dr，$d\theta$ はいずれも回転不変である．また，$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の各点 p において $(dr)_p$，$(d\theta)_p$ は $T_p^*\mathbb{R}^2$ の基底をなす．

$\Omega^1_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ に属する閉形式を任意にとって ω とおく．以下，ω が閉形式であることはいったん脇に置いておき，ω が回転不変な微分 1 形式であることから何がわかるか調べてみる．

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ において，dr，$d\theta$ は各点で余接空間の基底をなすから，ω は

$$\omega = f\,dr + g\,d\theta \tag{$\star$}$$

という形に一意的に表される（f，g は $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ で定義された関数）．この両辺を R_θ によって引き戻すと，dr，$d\theta$ はいずれも回転不変であることから

$$R_\theta^*\omega = (f \circ R_\theta)\,dr + (g \circ R_\theta)\,d\theta.$$

ところが $R_\theta^*\omega = \omega$ なので，$(\star)$ の表示が一意的であることにも注意すると，f，g はいずれも回転不変な関数であるという結論に達する．したがってこれらを r の関数（定義域は $(0,\infty)$ という区間）とみなすことができる．以下，$f = f(r)$，$g = g(r)$ と書く．

いまわかったことを用いて dr，$d\theta$ の定義を振り返りつつ $(\star)$ を書き直してみると

$$\omega = f(r)\cdot\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + g(r)\cdot\frac{-y\,dx + x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

となる．よって ω を $\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy$ と表したときの $\varphi(x,y)$ は，$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ においては

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xf(r) - yg(r))$$

で与えられる．右辺の関数は $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級関数に拡張できることになるが，その事実から何がわかるだろうか．$\varphi(x,y)$ を x 軸上に制限した $\varphi(x,0)$ という 1 変数関数は，いま書いた式から $x \neq 0$ の範囲で

$$\varphi(x,0) = \frac{1}{|x|}\cdot xf(|x|) = \begin{cases} f(x) & (x>0), \\ -f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

と表される．$f(x)$ はもともと $x > 0$ に対してしか意味をもたないが，実はこの関数は $\varphi(x,0)$ という $\mathbb{R}$ 全体で定義された C^∞ 級関数への拡張をもつことを上の式は示している．さらに C^∞ 級拡張 $\varphi(x,0)$ は x の奇関数であり，このことから，証明はやや難しいのだが，ある C^∞ 級関数 $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を用いて $\varphi(x,0) = x\tilde{\varphi}(x^2)$ と表されることが従う*．したがって f も $f(x) = x\tilde{\varphi}(x^2)$ と表せることになる．まったく同様に，ある C^∞ 級関数 $\tilde{\psi}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在して $g(y) = y\tilde{\psi}(y^2)$ である†．これらを用いて再び $(\star)$ を書き直すと

$$\omega = f(r)\,dr + g(r)\,d\theta = r\tilde{\varphi}(r^2)\,dr + r\tilde{\psi}(r^2)\,d\theta \qquad (\star')$$

となる．逆に $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ で定義されたこの形の微分 1 形式は $\mathbb{R}^2$ へと C^∞ 級に拡張できることがわかるだろう．すなわち，$(\star')$ は $\Omega^1_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ に属する微分 1 形式の一般形である．

それでは再び，$d\omega = 0$ であったことを思い出す．この場合，$g(r)$ ないし $\tilde{\psi}(r^2)$ は恒等的に 0 に等しい．なぜなら，まず $(\star')$ を外微分すると $d\omega = g'(r)\,dr\wedge d\theta$ で，これは 0 に等しいのであるが，$dr\wedge d\theta$ は $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ において nowhere vanishing だから $g'(r) = 0$ である．すなわちある定数 c が存在して恒等的に $g(r) = c$．ところが $g(r)$ は $r\tilde{\psi}(r^2)$ とも表せるのであり，よって $\lim_{r\to+0} g(r) = 0$ でなければならないから，定数 c は実際には 0 である．これで $\Omega^1_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ に属する閉形式は

$$\omega = f(r)\,dr = r\tilde{\varphi}(r^2)\,dr = \tilde{\varphi}(r^2)(x\,dx + y\,dy)$$

*C^k 級でいいのなら Taylor の定理を用いて比較的簡単に証明できます．C^∞ 級でやるのが難しいのです．これは Whitney による定理だそうです（H. Whitney, Differentiable even functions, *Duke Math. J.* **10** (1943), 159–160）．

†変数を y と書いたのは気分の問題にすぎません．論理的には何でもいいです．

と表されることがわかった．

さて，$d(\Phi(r^2)) = \omega = \tilde{\varphi}(r^2)(x\,dx + y\,dy)$ をみたすような C^∞ 級関数 $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を探してみよう．（というのは，先ほど $\varphi(x,0)$ を $x\tilde{\varphi}(x^2)$ と表すことができたのと同じ理由により，$\mathbb{R}^2$ 上の回転不変な C^∞ 級関数は，実はある C^∞ 級関数 $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を用いて $\Phi(r^2)$ と表されるのである．ここではこの事実を論理的には用いていないが，戦略を立てるために使っている．）そのためには $2\Phi'(s) = \tilde{\varphi}(s)$ となっていればよい．したがって

$$\Phi(s) = \frac{1}{2}\int_0^s \tilde{\varphi}(t)\,dt$$

とおけば $d(\Phi(r^2)) = \omega$ がみたされる．この $\Phi(r^2)$ がわれわれが見つけようとしていた関数である．

どんな解法を採用するにせよ，見込みのある方向に進んでいて 5 点，解法の基本的な方針を述べることができて 10 点，それを細部まで実行して 10 点を与えています．