

9 Hopf–Rinow の定理

9.1 $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とおく. $\mathbb{R}^2$ の Euclid 計量を制限して得られる M の Riemann 計量を g とする.

- (1) (M, g) が完備でないことを 3 通りの方法で確かめよう.
 - (a) 定義域を $[0, \infty)$ まで延長できないような (M, g) の測地線の例を挙げよ.
 - (b) (M, g) の収束しない Cauchy 列の例を挙げよ.
 - (c) (M, g) の有界閉集合であってコンパクトでないようなものの例を挙げよ.
- (2) $p = (-1, 0)$, $q = (1, 0)$ とおく. (M, g) において $d(p, q) = 2$ であることを示せ. また p から q に達する長さ 2 の区分的に滑らかな曲線が存在しないことを示せ.

9.2 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ は完備である. そのことを 2 通りの方法で確かめよう.

- (1) $\mathbb{H}^2$ は測地完備であることを示せ. [ヒント: 測地線は問題 7.2 で記述してある.]
- (2) $\mathbb{H}^2$ の任意の有界閉集合はコンパクトであることを示せ. [ヒント: たとえば Poincaré 開円板モデル B^2 を用いる. 双曲計量に関する有界閉集合 A は, 原点 0 を中心とする双曲計量に関するある距離球 $B_r^d(0)$ に含まれる. そこで $B_r^d(0)$ が B^2 のあるコンパクト部分集合に含まれることを確かめれば十分 (なぜか?).]

9.3 完備でない Riemann 多様体であっても, 「任意の 2 点 p, q に対し p から q に達する最短測地線が存在する」という性質をみたす場合はある. 例を挙げよ.

- 9.4 (1) Riemann 多様体 (M, g) では, 距離球 $B_r^d(p)$ の閉包は $\{q \in M \mid d(p, q) \leq r\}$ にいつでも等しいことを示せ.
- (2) 一般の距離空間 (X, d) では, 開球 $B_r^d(p)$ の閉包は $\{q \in X \mid d(p, q) \leq r\}$ に等しいとは限らない. そのことを示す例を挙げよ.