

7 測地線 (1)

7.1 球面 S^n の測地線について調べる.

- (1) $\mathbb{R}^{n+1}$ の互いに直交する 2 つの単位ベクトル a, b を用いて

$$\gamma_{a,b}(t) = (\cos t)a + (\sin t)b, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

と定める. $\gamma_{a,b}$ が S^n の測地線であることを示せ. [ヒント: 問題 5.4 を利用せよ.]

- (2) 速さ 1 の測地線 $\gamma: I \rightarrow S^n$ はある a, b を用いて $\gamma(t) = \gamma_{a,b}(t)$ と表されることを示せ. [ヒント: $0 \in I$ と仮定して問題ない. そして測地線は $\gamma(0), \dot{\gamma}(0)$ を指定すれば一意的.]

7.2 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ の測地線について調べる. 上半平面モデル $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ を用いることにしよう. Riemann 計量は $g = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ で与えられる.

- (1) $\gamma_0(t) = (0, e^t)$ で定義される曲線 $\gamma_0: (-\infty, \infty) \rightarrow H^2$ が測地線であることを示せ. [ヒント: 問題 3.2.]

- (2) 点 (x, y) を複素数 $z = x + iy$ と同一視する. 次の 3 種類の写像がそれぞれ H^2 の等長変換を与えることを示せ.

(a) $\Phi(z) = \lambda z$ (λ は正の実数).

(b) $\Phi(z) = z + c$ (c は実数).

(c) $\Phi(z) = -1/z$.

- (3) 速さ 1 の測地線 $\gamma: I \rightarrow H^2$ はある等長変換 Φ によって $\gamma = \Phi \circ \gamma_0$ と表されることを示せ.

[ヒント: 長さ 1 の任意の接ベクトル $v \in T_{(0,1)}H^2$ に対し, $\gamma(0) = (0, 1)$, $\dot{\gamma}(0) = v$ をみたす測地線 γ を $\Phi \circ \gamma_0$ の形で表せることを示せば十分である (なぜか?). 任意の実数 c に対し, (2) で挙げた 3 種類の写像を合成して得られる

$$z \mapsto z + c \mapsto -\frac{1}{z+c} \mapsto -\frac{c^2+1}{z+c} \mapsto -\frac{c^2+1}{z+c} + c = \frac{cz+1}{z+c}$$

も等長変換であることを利用せよ.]

- 7.3 (1) (M, g) を連結な Riemann 多様体とし, $\Phi: M \rightarrow M$ を等長変換とする. ある点 $p \in M$ において $\Phi(p) = p$, $(d\Phi)_p = \text{id}_{T_p M}$ ならば Φ は恒等変換であることを示せ. [ヒント: $A = \{q \in M \mid \Phi(q) = q, (d\Phi)_q = \text{id}_{T_q M}\}$ とおく. 仮定によって A は空集合ではない. A が開集合かつ閉集合であることを示す.]
- (2) Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換が $\Phi(x) = Ax + b$ (A は n 次直交行列, b は $\mathbb{R}^n$ のベクトル) の形に表されるものに限られることを示せ.
- (3) 球面 S^n の等長変換が $\mathbb{R}^{n+1}$ の直交変換の制限によって得られるものに限られることを示せ.

7.4 $\gamma: I \rightarrow M$ を速さ 1 の測地線とする (ただし $I \subset \mathbb{R}$ は 0 を含む区間). $p = \gamma(0)$ において $\dot{\gamma}(0), v_2, \dots, v_n$ が $T_p M$ の正規直交基底となるように $n-1$ 個のベクトル v_j ($2 \leq j \leq n$) をとる. 各 j に対し, $e_j(t)$ を $e_j(0) = v_j$ をみたす γ に沿って定義された平行ベクトル場とする. すると各 $t \in I$ において $\dot{\gamma}(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$ は $T_{\gamma(t)} M$ の正規直交基底である.

逆に, 速さ 1 の曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ に沿って平行ベクトル場 $e_2(t), \dots, e_n(t)$ が定義されており, 各 $t \in I$ に対し $\dot{\gamma}(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$ が $T_{\gamma(t)} M$ の正規直交基底であるとする. そのとき γ は測地線であることを示せ.

7.5 Riemann 多様体 (M, g) の点 $p \in M$ において正規球 $B_\varepsilon(p)$ をとり, この正規球における正規座標系 $(x^1, \dots, x^n)$ を考える.

- (1) $(x^1, \dots, x^n)$ に関する Christoffel 記号 Γ^k_{ij} の点 p における値がすべて 0 であることを示せ. [ヒント: 任意の $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\gamma(t) = (a^1 t, \dots, a^n t)$ は測地線である. これを測地線の方程式に代入する.]
- (2) $(x^1, \dots, x^n)$ に関して $(\partial g_{ij} / \partial x^k)(p) = 0$ であることを示せ.
(実は g_{ij} の 2 次までの Taylor 展開は

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjl}(p) x^k x^l + O(|x|^3)$$

で与えられる (第 12 回?). つまり Riemann 曲率テンソルは, 正規座標系における g と Euclid 計量のずれの主要部を表している.)