6 曲率 (2)

今回以降，Riemann 多様体において ∇ と書いたら，それは Levi-Civita 接続を表すものとする．

6.1 回転放物面 $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x^2+y^2\}$ の Gauss 曲率 K を $r=\sqrt{x^2+y^2}$ の関数として求めよ．ただし M には $\mathbb{R}^3$ の Euclid 計量から誘導される Riemann 計量を与える．
［注：ここでは問題 5.1 で求めた曲率テンソルを利用することを想定している（なお問題 5.1 では直交座標を使ったが，極座標を使うのもよい考えである）が，第 2 基本形式を用いて Gauss 曲率を求めることもできる．後者の方法を知っている人はそちらでも計算してみよう．］

6.2 Riemann 多様体 (M,g) の曲率テンソルがある定数 K により $R_{ijkl}=K(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$ で与えられるとき，(M,g) は定曲率 K をもつことを確かめよ．（よって問題 5.2 の結果により球面 S^n は定曲率 1，双曲空間 $\mathbb{H}^n$ は定曲率 -1 をもつ．）

6.3 Riemann 多様体 (M,g) に対し，λ を正定数として $\tilde{g}=\lambda^2 g$ とおく（もし (M,g) が $\mathbb{R}^N$ の部分多様体なら，$(M,\tilde{g})$ は (M,g) を λ 倍に相似拡大したものにあたる）．

(1) g，$\tilde{g}$ の定める 2 つの Levi-Civita 接続は一致する．そのことを示せ．

(2) g，$\tilde{g}$ の断面曲率のあいだには $\tilde{K}(\sigma)=\lambda^{-2}K(\sigma)$ という関係があることを示せ*．

6.4 Riemann 多様体の曲率の性質 $\langle R(X,Y)Z,W\rangle=-\langle R(X,Y)W,Z\rangle$ を†定義から直接的に導きたい．

(1) ベクトル場 X，Y，Z，W に対し次を示せ：

$$XY\langle Z,W\rangle=\langle\nabla_X\nabla_Y Z,W\rangle+\langle Z,\nabla_X\nabla_Y W\rangle+\langle\nabla_X Z,\nabla_Y W\rangle+\langle\nabla_Y Z,\nabla_X W\rangle.$$

(2) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle=-\langle R(X,Y)W,Z\rangle$ を示せ．

6.5 Riemann 多様体の曲率について，$R(X,Y,Z)=R(X,Y)Z$ とおくと

$$(\nabla_X R)(Y,Z,W)+(\nabla_Y R)(Z,X,W)+(\nabla_Z R)(X,Y,W)=0$$

であることを示せ（**第 2 Bianchi 恒等式**）．（この結論を問題 5.6 で述べた記法を用いて $\nabla_i R_{jk\ m}^{\ \ l}+\nabla_j R_{ki\ m}^{\ \ l}+\nabla_k R_{ij\ m}^{\ \ l}=0$ とも書く．）

---

*「相似拡大すると局所的な曲がりは小さくなる」というのは直観にも合うであろう．人間は地球表面が曲がっていることを感知できない．

†ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $g(\cdot,\cdot)$ のこと．

6.6　断面曲率 $K(\sigma)$ が任意の点 $p \in M$ と任意の 2 次元部分空間 $\sigma \subset T_pM$ について与えられれば曲率テンソルは一意的に定まることを示せ．（とくに問題 6.2 により，(M,g) が定曲率 K をもつとき，曲率テンソルは $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$ で与えられる．）

［ヒント：これは純粋に線型代数の問題ではあるが簡単ではない．R_{ijkl} を具体的にいくつかの σ に対する断面曲率 $K(\sigma)$ を用いて表すことで証明することも可能だが，抽象的な議論で済ませるには次のようにすればよい（詳細を補うこと）．各点 $p \in M$ でベクトル空間の外積 $W = T_pM \wedge T_pM$ を考える．W 上の対称双線型形式 B を $B(v_1 \wedge w_1, v_2 \wedge w_2) = R(v_1, w_1, v_2, w_2)$ により定義できる．断面曲率が与えられていれば $B(v \wedge w, v \wedge w)$ は決まっている．このことから polarization により B 自体がわかる．］

6.7　(1)　Riemann 多様体において，$(0,2)$ 型テンソル Ric を曲率テンソルの縮約によって $\mathrm{Ric}_{ij} = R_{ki}{}^{k}{}_{j}$（$= -R_{ik}{}^{k}{}_{j}$）と定義する（**Ricci テンソル**）*．Ric が対称テンソルであること，すなわち $\mathrm{Ric}_{ij} = \mathrm{Ric}_{ji}$ であることを示せ．［ヒント：第 1 Bianchi 恒等式．］

(2)　定曲率 K をもつ Riemann 多様体 (M,g) の Ricci テンソルが $\mathrm{Ric}_{ij} = (n-1)Kg_{ij}$ で与えられることを確かめよ†．

6.8　(1)　Riemann 多様体 (M,g) において

$$\nabla^l R_{ijkl} + \nabla_i \mathrm{Ric}_{jk} - \nabla_j \mathrm{Ric}_{ik} = 0$$

であることを示せ．なお，$\nabla^m R_{ijkl} = g^{mp}\nabla_p R_{ijkl}$ とおき（問題 4.3 の脚注も参照），これを添字 l，m に関して縮約したのが $\nabla^l R_{ijkl}$ である．［ヒント：第 2 Bianchi 恒等式の縮約．なお，テンソルの共変微分は縮約と可換であるように定められていたから，たとえば $\nabla_m \mathrm{Ric}_{ij}$ は $\nabla_m R_{ki}{}^{l}{}_{j}$ を添字 k，l について縮約したものに等しい‡．］

(2)　$S = \mathrm{Ric}_i{}^i$（$= g^{ij}\mathrm{Ric}_{ij}$）を**スカラー曲率**とよぶ§．

$$\nabla^j \mathrm{Ric}_{ij} = \frac{1}{2}\nabla_i S$$

であることを示せ．［ヒント：(1) の等式をもう一度縮約．］

(3)　$\dim M \geqq 3$ かつ M は連結であるとする．$\mathrm{Ric}_{ij} = fg_{ij}$（$f$ は関数）ならば f は定数関数であることを示せ¶．

---

*Ricci テンソルを R_{ij} と書くことも多い．この場合，Riemann 曲率テンソルとの区別は添字の個数で行われる．

†ある定数 $c \in \mathbb{R}$ について $\mathrm{Ric}_{ij} = cg_{ij}$ となっているような Riemann 計量を **Einstein 計量**という．2 次元，3 次元では定曲率 $\Longleftrightarrow$ Einstein だが 4 次元以上では違う．**Einstein 方程式** $\mathrm{Ric}_{ij} = cg_{ij}$ は Riemann 計量 g_{ij} に関する 2 階非線型偏微分方程式であり，幾何学で現れる最も有名な偏微分方程式のひとつである．

‡ついでにいうと，これを $\nabla_m R_{ki}{}^{k}{}_{j}$ とも書く．この記法からは共変微分と縮約操作のどちらが先に行われたのか判然としないのだが，どちらでも結果は同じなので曖昧でかまわないのだ．むしろ曖昧であることが便利だったりする．

§スカラー曲率を R と書くことも多い．

¶したがって $\dim M \geqq 3$ のとき，Einstein 計量とは $\mathrm{Ric}_{ij} = fg_{ij}$（$f$ は関数）であるような Riemann 計量のことだといってもよい．あるいは $\mathrm{Ric} = (S/n)g + \mathrm{Ric}_0$ と書いて，Einstein 計量とは Ric_0（Ricci テンソルの**トレースレス部分**ないし**トレースフリー部分**）が 0 であるような Riemann 計量のことだといってもよい．