

3 Levi-Civita 接続

3.1 $\mathbb{R}^2$ の Euclid 計量 g の, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, x) \mid x \leq 0\}$ における極座標系 (r, θ) に関する Christoffel 記号 Γ^k_{ij} が

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{2}{r}, \quad \Gamma^1_{22} = -2r$$

で与えられることを示せ (r, θ に対応する添字を順に 1, 2 とした). [ヒント: $g^{11} = 1$, $g^{22} = 1/r^2$, $g^{12} = g^{21} = 0$.]

3.2* (1) Riemann 計量 g がある局所座標系 $(x^1, \dots, x^n)$ に関して $g_{ij} = e^{2f} \delta_{ij}$ (f は実数値 C^∞ 級関数) と表されたとする*. そのとき, Christoffel 記号 Γ^k_{ij} が

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \delta_j^k + \frac{\partial}{\partial x^j} \delta_i^k - \frac{\partial}{\partial x^l} \delta^{kl} \delta_{ij}$$

で与えられることを示せ†.

(2) 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ を Poincaré モデルにより $B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とみなす. 座標系 (x, y) に関する Christoffel 記号 Γ^k_{ij} を求めよ (x, y に対応する添字をたとえば順に 1, 2 とせよ).

(3) 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ を上半空間モデルにより $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ とみなす. 座標系 (x, y) に関する Christoffel 記号 Γ^k_{ij} を求めよ.

(4) 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ を上半空間モデルにより H^2 とみなす. ベクトル場 $X = y \partial / \partial y$ について, Levi-Civita 接続に関して $\nabla_X X = 0$ であることを示せ.

以下は講義の内容を論理的に補完するための問題です.

3.3 ∇ を多様体 M 上のベクトル束 E の接続とする. $s \in \Gamma(E)$ に対し, $(\nabla_X s)(p) \in E_p$ が $X_p \in T_p M$ のみに依存する‡ことを証明したい.

より一般に次のことを示そう. E, F をベクトル束とする. $T: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ が関数線型 ($f \in C^\infty(M)$ に対し $T(fs) = fT(s)$ である) ならば, 任意の点 $p \in M$ に対し, $T(s)(p)$ は $s(p)$ のみに依存する. これを以下のようにして証明せよ.

(1) まず T が以下の(*)をみたす (T は局所的であるという) ことを示せ.

(*) M の任意の開集合 U に対し, $s|_U = \mathfrak{s}|_U$ ならば $(Ts)|_U = (T\mathfrak{s})|_U$ である.

*共形平坦 (conformally flat) であるという.

†ただし δ は Kronecker のデルタ. 添字が両方とも上 (または下) にあったり上下に分かれていたりするが, いずれも同様に「添字の値が一致するときは 1, そうでないときは 0」を表す記号 (それにもかかわらず上下を気にして書き分けているのは, 添字を「正しい」位置に置き, Einstein の規約が正しく働くようにするため).

‡この事実によって, $s \in \Gamma(E)$ と $v \in T_p M$ に対し $\nabla_v s \in E_p$ が定義されることがわかる.

[ヒント： $s|_U = 0 \Rightarrow (Ts)|_U = 0$ を証明すれば十分．各 $p \in U$ に対し，点 p の近傍で $\phi \equiv 0$ ， U^c 上で $\phi \equiv 1$ であるような $\phi \in C^\infty(M)$ がとれる（1 の分割の存在による）． $s|_U = 0$ なら $s = \phi s$ である．ここで関数線型性を用いる．]

- (2) われわれは $s(p) = 0 \Rightarrow T(s)(p) = 0$ を証明すればよい．点 $p \in M$ に対し， p を含むチャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ をとる． $s(p) = 0$ をみたす任意の $s \in \Gamma(E)$ は，必要なら U を小さく取り直すことにより， U において

$$s = x^1 s_1 + \dots + x^n s_n, \quad s_i \in \Gamma(U, E)$$

と表されることを示せ．[注意：そんなに明らかではない．]

- (3) $s(p) = 0$ をみたす $s \in \Gamma(E)$ に対し， p の近傍で s を (2) のように表す．さらに $1 \leq i \leq n$ に対し $f^i \in C^\infty(M)$ ， $\tilde{s}_i \in \Gamma(E)$ を点 p の近傍でそれぞれ x^i ， s_i に一致するようにとって $\tilde{s} = f^1 \tilde{s}_1 + \dots + f^n \tilde{s}_n$ と定める．点 p の近傍で $\tilde{s} = s$ である．これを用いて $T(s)(p) = 0$ を示せ．

3.4 ∇ を多様体 M 上のベクトル束 E の接続とする．

- (1) $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対し， $\nabla_X : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ が局所的であることを示せ．
(2) U を M の開集合とする．与えられた $s \in \Gamma(U, E)$ と $X \in \mathfrak{X}(U)$ に対し，各点 $p \in U$ において，点 p の近傍で s と一致するような $\tilde{s} \in \Gamma(E)$ をとって $(\nabla_X s)(p) = \nabla_{X_p} \tilde{s} \in E_p$ と定める．これで $E|_U$ の接続がうまく定義できていることを証明せよ（ ∇ の U への制限）．

3.5 (M, g) を Riemann 多様体とする．Levi-Civita 接続の存在と一意性を証明しよう．

- (1) まず各チャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ における考察をする． ∇ を TU の接続とし，その接続係数を Γ^k_{ij} とする．振率がゼロであるためには $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ が必要十分であった．一方， ∇ が g と整合的であるためには， $\Gamma_{kij} = g_{kl} \Gamma^l_{ij}$ とおいたとき

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{jik} \quad (*)$$

が必要十分であることを証明せよ．

- (2) 引き続きチャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ において考察する． $\Gamma_{kij} = \Gamma_{kji}$ と (*) をみたすような n^3 個の関数 Γ_{kij} が

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

で与えられるものただ一組しか存在しないことを示せ．これで各チャート U には振率ゼロかつ計量と整合的な接続がただ一つ存在することがわかる．

- (3) (2) で得られた接続を ∇^U と書く．各チャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ への制限が ∇^U に一致するような TM の接続 ∇ がただ一つ存在することを示せ．