

14 Cartan–Hadamard の定理

- 14.1 完備 Riemann 多様体 (M, g) が非正曲率をもつ (断面曲率が $K(\sigma) \leq 0$ をみたす) とする. そのとき M のどんな測地線 $\gamma: [0, \infty) \rightarrow M$ も始点 $\gamma(0)$ の共役点を $(0, \infty)$ の範囲にもたないが, これは以下のようにして, Rauch の比較定理を使わずに簡単に証明できる.

γ に沿って定義された $J(0) = 0$, $J'(0) \neq 0$ をみたす Jacobi 場 J を考える. 仮定 $K(\sigma) \geq 0$ を用いて $\frac{d}{dt}|J(t)|^2 \geq 0$ を示せ. またそのことから $t > 0$ で $|J(t)|^2 > 0$ であることを示せ.

- 14.2 M, N を C^∞ 級多様体とし, $f: N \rightarrow M$ を局所微分同相写像とする. この f が次に述べる **smooth path lifting property** をもつと仮定する.

任意の C^∞ 級曲線 $\gamma: [0, T] \rightarrow M$ と $f(q_0) = \gamma(0)$ をみたす $q_0 \in N$ に対し, q_0 を始点とする C^∞ 級曲線 $\tilde{\gamma}: [0, T] \rightarrow N$ であって, γ のリフトになっている ($f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ をみたす) ようなものが存在する.

そのとき f が可微分被覆写像であることを, 以下に従って証明せよ.

[注: 位相空間のあいだの連続写像 $f: Y \rightarrow X$ についても同様の主張があるが, それが可微分カテゴリーでも成立するのだ, というのが本問の眼目である.]

- (1) 任意に $p \in M$ をとる. M は多様体だから, p の弧状連結かつ単連結な開近傍 U をとれる. $f^{-1}(U)$ の連結成分への分解を $f^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ とする ($f^{-1}(U)$ は多様体 N の開集合であることから局所弧状連結なので, V_α は弧状連結でもある). 各 V_α が N の開集合であることを示せ.
- (2) 各 V_α への f の制限 $f|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow U$ を考える. これが全単射であることを示せば, 逆写像 $(f|_{V_\alpha})^{-1}$ の微分可能性は f が局所微分同相写像であることから直ちにわかるので, f が可微分被覆写像であると結論できる.

まず, $f|_{V_\alpha}$ が全射であることを, smooth path lifting property を用いて示せ.

- (3) $f|_{V_\alpha}$ の単射性を示そう. もし $f(q_1) = f(q_2)$, $q_1, q_2 \in V_\alpha$ ならば, q_1 を出発し q_2 に至る V_α の C^∞ 級曲線 $\gamma: [0, T] \rightarrow V_\alpha$ がある. $\underline{\gamma} = f \circ \gamma: [0, T] \rightarrow U$ は U の閉曲線であり, U の単連結性により定曲線にホモトピック. このホモトピーを $F: [0, T] \times [0, 1] \rightarrow U$ とする (端点は固定しておく). F は C^∞ 級写像とすることができる*.

F が $\tilde{F}(t, 0) = \gamma(t)$ をみたすリフト $\tilde{F}: [0, T] \times [0, 1] \rightarrow V_\alpha$ をもつことがわかれば $q_1 = q_2$ が従う. その理由を説明せよ.

*本問はこの事実をとりあえず認めて解答してよい. Friedrichs の軟化子をうまく使えばよいのだが, 写像 F の値は多様体の点だから何らかの工夫が必要である. U を $\mathbb{R}^n$ の原点を中心とする開球を像とするようなチャートとしておき, F を $\mathbb{R}^n$ 値関数とみなすのが一つの単純な方法だろう.

(4) $0 \leq s_0 < 1$ とする. F が仮に $[0, T] \times [0, s_0]$ までは前述のようなリフト $\tilde{F}$ をもつとしよう. $[0, T]$ のコンパクト性に注意して, ある $\delta > 0$ が存在して $\tilde{F}$ が $[0, T] \times [0, s_0 + \delta)$ における F のリフトに拡張することを示せ.

(5) $0 < s_0 \leq 1$ とする. F が $[0, T] \times [0, s_0)$ において前述のようなリフト $\tilde{F}$ をもつとしよう. そのとき, $\tilde{F}$ は $[0, T] \times [0, s_0]$ における F のリフトに拡張することを示せ.

[ヒント: $\omega_{s_0} = F(t, s_0)$ とおけば, f の smooth path lifting property によって ω_{s_0} は q_1 を始点とするリフト $\tilde{\omega}_{s_0}: [0, T] \rightarrow N$ をもつ. (4) と同様にして, $\tilde{\omega}_{s_0}$ は $[0, T] \times (s_0 - \delta, s_0]$ における F のリフト $\tilde{F}'$ に拡張する. ここで $s_0 - \delta < s < s_0$ に対しては, $F(\cdot, s)$ の 2 通りのリフト $\tilde{F}(\cdot, s)$, $\tilde{F}'(\cdot, s)$ が得られたことになるが, 始点 $\tilde{F}(0, s)$, $\tilde{F}'(0, s)$ 同士は一致することと N の Hausdorff 性に注意して, 実は $\tilde{F}(\cdot, s) = \tilde{F}'(\cdot, s)$ であることを示せ. したがって $\tilde{F}$ と $\tilde{F}'$ は定義域の共通部分で一致する.]

(6) (4) と (5) から, (3) で述べたようなリフト $\tilde{F}: [0, T] \times [0, 1] \rightarrow V_\alpha$ が存在することを結論せよ. ゆえに $f|_{V_\alpha}$ は単射であり, f は可微分被覆写像であることがわかる.