

13 Bonnet–Myers の定理

- 13.1 測地線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ について, γ に沿って定義された区分的 C^∞ 級ベクトル場 V, W に対し index form

$$I(V, W) = \int_a^b (\langle \dot{V}, \dot{W} \rangle + \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, W \rangle) dt$$

を考える ($\dot{V}$ は $\nabla_{\dot{\gamma}} V$ を表す). V が Jacobi 場 J であるとき

$$I(J, W) = \langle \dot{J}(b), W(b) \rangle - \langle \dot{J}(a), W(a) \rangle$$

であることを確かめよ.

- 13.2 Rauch の比較定理を経由しない Bonnet の定理の証明を与えよう. 完備 Riemann 多様体 (M, g) の断面曲率が $K(\sigma) \geq \delta > 0$ をみたすとする. Hopf–Rinow の定理により, 速さ 1 の測地線 $\gamma: [0, T] \rightarrow M$ は $T > \pi/\sqrt{\delta}$ のとき最短測地線ではありえないことを証明すればよい. そのためには, γ に沿って定義された $V(0) = V(T) = 0$ をみたす区分的 C^∞ 級ベクトル場 V であって, $I(V, V) < 0$ をみたすものが存在することを示せば十分である.
 e を γ に沿った長さ 1 の任意の平行法ベクトル場として

$$V(t) = \left(\sin \frac{\pi t}{T} \right) e(t)$$

とおく.

$$(1) \quad I(V, V) = \int_0^T \left(\sin^2 \frac{\pi t}{T} \right) \left(\frac{\pi^2}{T^2} - \langle R(e, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, e \rangle \right) dt \text{ を示せ.}$$

$$(2) \quad I(V, V) < 0 \text{ であることを結論せよ. よって Bonnet の定理が従う.}$$

- 13.3 前問の証明を改良して Myers の定理を示そう. n 次元完備 Riemann 多様体 (M, g) の Ricci テンソルが $\text{Ric} \geq (n-1)\delta > 0$ をみたすとする. 前問と同様に, 速さ 1 の測地線 $\gamma: [0, T] \rightarrow M$ で $T > \pi/\sqrt{\delta}$ なるものに対し, γ に沿って定義された $V(0) = V(T) = 0$ をみたす区分的 C^∞ 級ベクトル場 V であって, $I(V, V) < 0$ をみたすものが存在することを示せば十分である.

$e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ を γ に沿った互いに直交する長さ 1 の平行法ベクトル場とし

$$V_i(t) = \left(\sin \frac{\pi t}{T} \right) e_i(t)$$

とおく. $\sum_{i=1}^{n-1} I(V_i, V_i) < 0$ を示せ. よって $I(V_i, V_i) < 0$ をみたす i が少なくとも一つ存在するから, Myers の定理が従う.