

12 Rauch の比較定理

12.1 ある種の状況下では, Rauch の比較定理から得られる帰結は比較的簡単に直接示せる.

例として, 本問では非正曲率をもつ (M, g) を考える (断面曲率が各点で任意の σ に対して $K(\sigma) \leq 0$ をみたすとする). そのとき Rauch の比較定理を用いて Euclid 空間と比較することにより, 任意の測地線 $\gamma: [0, T] \rightarrow M$ および γ に沿った法 Jacobi 場 J で $J(0) = 0$, $|J(0)| = 1$ をみたすものに対し ($\dot{J}$ は $\nabla_{\dot{\gamma}} J$ のこと), $0 \leq t \leq T$ で $|J(t)| \geq t$ が成り立つことが従う. とくに $t > 0$ で $J(t) \neq 0$ だが*, これを直接証明してみよう.

- (1) $f(t) = |J(t)|^2$ とおく. これは C^∞ 級関数である (局所座標系を用いれば $J(t)$ の各成分は t について C^∞ 級だから[†]). $f'(t) = 2\langle J(t), \dot{J}(t) \rangle$, $f''(t) = 2|\dot{J}(t)|^2 + 2\langle J(t), \ddot{J}(t) \rangle$ である. これと仮定 $K(\sigma) \leq 0$ を用いて $f''(t) \geq 0$ を示せ.
- (2) $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$ に注意して, $t > 0$ ならば $f(t) > 0$ である (したがって $J(t) \neq 0$ である) ことを示せ.

12.2 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ を測地線とする. $(\gamma_s)_{-\varepsilon < s < \varepsilon}$ を γ の変分であって両端を固定するようなものとするとき, 変分ベクトル場を V とすれば

$$\left. \frac{dE(\gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2E(\gamma_s)}{ds^2} \right|_{s=0} = I(V, V)$$

であった.

実は, (γ_s) が両端を固定するような変分でなかったとしても, $s \mapsto \gamma_s(a)$, $s \mapsto \gamma_s(b)$ がそれぞれ測地線になっていれば同じ等式が成り立つ. それを確かめよ. ただしここでは $I(V, V) = \int_a^b (|\nabla_{\dot{\gamma}} V|^2 + \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V \rangle) dt$ を index form $I(V, V)$ の定義とする.

*このことから γ 上に点 $\gamma(0)$ の共役点が存在しないことも直ちにわかる. これは任意の Jacobi 場は接成分と法成分に分解しても各々の成分が Jacobi 場であり, しかも接 Jacobi 場とは $(a + bt)\dot{\gamma}(t)$ という形 ($a, b \in \mathbb{R}$) のベクトル場にすぎないからである. 次回触れる.

[†]もし $f(t) = |J(t)|$ としてしまうと, $J(t) = 0$ となる t において $f(t)$ が微分可能でない恐れが生じる.

12.3 $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$ は Riemann 多様体で $\dim M \leq \dim \tilde{M}$ とする. 任意の $p \in M, \sigma \in T_p M$ と任意の $\tilde{p} \in \tilde{M}, \tilde{\sigma} \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ について断面曲率の値が $K(\sigma) \geq K(\tilde{\sigma})$ をみたすと仮定する.

あらためて点 $p \in M, \tilde{p} \in \tilde{M}$ をとり固定する. 正の数 r を, 点 p における指数写像 $\exp_p$ が $B_r(0) \subset T_p M$ で定義されて臨界点をもたず, また $\exp_{\tilde{p}}$ も $B_r(0) \subset T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ で定義されるようにしておく*.

- (1) $0 < T < r$ として, $\gamma: [0, T] \rightarrow M, \tilde{\gamma}: [0, T] \rightarrow \tilde{M}$ をそれぞれ $p, \tilde{p}$ を始点とする速さ 1 の測地線とする. $v \in T_p M, \tilde{v} \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ であって $|v| = |\tilde{v}|, \langle \dot{\gamma}(0), v \rangle = \langle \dot{\tilde{\gamma}}(0), \tilde{v} \rangle$ をみたすものに対し, $0 \leq t \leq T$ について $|(d \exp_p)_{t\dot{\gamma}(0)}(v)| \leq |(d \exp_{\tilde{p}})_{t\dot{\tilde{\gamma}}(0)}(\tilde{v})|$ であることを示せ. [ヒント: $J(t) = (d \exp_p)_{t\dot{\gamma}(0)}(tv)$ は γ に沿った Jacobi 場で $J(0) = 0, \dot{J}(0) = v$ である. $\tilde{J}(t) = (d \exp_{\tilde{p}})_{t\dot{\tilde{\gamma}}(0)}(t\tilde{v})$ についても同様.]
- (2) $\varphi: T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ を内積を保つ線型同型写像とする. 任意に与えたなめらかな曲線 $c: [a, b] \rightarrow B_r(0) \subset T_p M$ に対し

$$\omega(s) = \exp_p(c(s)), \quad \omega_0(s) = \exp_{\tilde{p}}(\varphi \circ c(s)), \quad a \leq s \leq b$$

と定める. そのとき $L(\omega) \leq L(\omega_0)$ であることを示せ.

[コメント: これと似たアイディアに基づき, 次のような**体積比較定理**を導くこともできる. n 次元完備 Riemann 多様体 (M, g) について, ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して (M, g) の Ricci テンソルが各点で $\text{Ric} \geq (n-1)k$ をみたすとき[†], 定断面曲率 k をもつ n 次元単連結完備 Riemann 多様体[‡]における半径 r の球の体積を $\text{Vol}(B_r^k)$ と書けば, (M, g) の任意の点 p を中心とする距離球 $B_r^d(p)$ の体積 $\text{Vol}(B_r^d(p))$ は

$$\text{Vol}(B_r^d(p)) \leq \text{Vol}(B_r^k)$$

をみたす (**Bishop の比較定理**). これはさらに「 $\text{Vol}(B_r^d(p))/\text{Vol}(B_r^k)$ は r について単調減少である」という形で精密化される (**Bishop–Gromov の比較定理**).]

*本問は Cheeger & Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry* の系 1.35 や do Carmo, *Riemannian Geometry* の第 10 章命題 2.5 にあたるが, これらの文献は r にもっと強い制約を課している. ここに書いたことで十分のように思えるのかもしれませんが, 修正が必要であればそれも検討して, 私に教えてください.

[†]Ricci テンソルは各点で $T_p M$ 上の対称双線型形式を定めるが, その最小固有値が $\geq (n-1)k$ であるという意味.

[‡] $k > 0$ なら半径 $1/\sqrt{k}$ の球面, $k = 0$ なら Euclid 空間, $k < 0$ なら双曲空間を適当に相似拡大または縮小して断面曲率が k になるようにしたもの.