11 曲線のエネルギーとその変分

11.1 M を完備 Riemann 多様体とし, N を M の閉部分多様体とする. p を N 上にない M の点とする. $d(p, N) = \inf_{q' \in N} d(p, q')$ とおく.

- (1) $d(p, q) = d(p, N)$ をみたす $q \in N$ が存在することを示せ. [ヒント: Hopf-Rinow の定理により有界閉集合はコンパクト.]
- (2) (1) のような q に対して p と q を結ぶ最短測地線 γ を任意の一つとる. γ が N に直交することを示せ. [ヒント: 曲線 γ の最短性を直接利用してもよいが, ここではエネルギーを使う方針を示す. 直交しないとする. そのとき始点 p を固定する γ の変分 (γ_s) で, 変分ベクトル場 V が $\langle V(b), \dot{\gamma}(b) \rangle < 0$ をみたすようなものをとれる. ある $s = s_0$ が存在して $E(\gamma_{s_0}) < E(\gamma)$ であることを示し, γ が最短測地線であることと合わせて矛盾を導け.]

11.2 (1) V を向きづけられた奇数次元実計量ベクトル空間とする. 向きを保つ任意の直交変換 $\varphi: V \rightarrow V$ に対し, $\varphi(v) = v$ をみたす 0 でないベクトル $v \in V$ が存在することを示せ.

- (2) (M, g) を向きづけられた偶数次元 Riemann 多様体とし, 断面曲率が正である*とする. 任意の閉測地線 γ に対し, γ がそれよりも短い閉曲線にホモトピックであることを示せ†. [ヒント: 仮定と (1) により, 閉測地線 γ に沿って非自明な平行ベクトル場 $V = V(t)$ をとることができる. V を変分ベクトル場とする γ の変分 (γ_s) をとる (ただし各 γ_s も閉曲線とする). エネルギー $E(s) = E(\gamma_s)$ について $E'(0) = 0$, $E''(0) < 0$ を示し, 利用せよ.]

*各点 $p \in M$ におけるすべての 2 次元部分空間 $\sigma \subset T_p M$ に対し $K(\sigma) > 0$ であるという意味.

† (なめらかな) 閉曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ とは, 始点 $\gamma(a)$ と終点 $\gamma(b)$ が一致していて, しかも $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t - k(b - a)), \quad \text{ただし } t \in \mathbb{Z} \text{ は } t - k(b - a) \in [a, b] \text{ となるように選ぶ}$$

と定めたとき $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow M$ がなめらかな曲線であるようなもの. 円周 S^1 からの C^∞ 級写像のことだといってもよい. さらに上記の $\tilde{\gamma}$ が測地線であるとき, 閉曲線 γ は (閉) 測地線であるという.