

10 Jacobi 場

10.1 $F: I_1 \times I_2 \rightarrow M$ を区間の直積 $I_1 \times I_2$ から Riemann 多様体への C^∞ 級写像とし, 曲線 $\gamma_s: I_2 \rightarrow M$ を $\gamma_s(t) = F(s, t)$ で, 曲線 $\omega_t: I_1 \rightarrow M$ を $\omega_t(s) = F(s, t)$ で定義する. また各 $(s, t) \in I_1 \times I_2$ に対し $V(s, t) \in T_{F(s, t)}M$ が与えられており, (s, t) に関して C^∞ 級であるとする*. $\nabla_{\dot{\omega}_t} \nabla_{\dot{\gamma}_s} V - \nabla_{\dot{\gamma}_s} \nabla_{\dot{\omega}_t} V = R(\dot{\omega}_t, \dot{\gamma}_s)V$ を示せ. [ヒント: 局所座標系を用いて計算.]

10.2 測地線 $\gamma: I \rightarrow M$ に沿って定義された Jacobi 場 $J = J(t)$ について, ある $t_0 \in I$ に対し $J(t_0) \perp \dot{\gamma}(0)$, $\dot{J}(t_0) \perp \dot{\gamma}(0)$ ならば任意の $t \in I$ に対し $J(t) \perp \dot{\gamma}(t)$ であることを示せ. [ヒント: 内積 $\langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$ を t に関して 2 回微分する.]

10.3 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ における Jacobi 場の例を, 測地線の 1 パラメタ族をもとに構成してみよう. 上半平面モデル $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ を用いる.

(1) 任意の実数 s に対し,

$$\gamma_s(t) = \left(\frac{s(e^{2t} - 1)}{1 + s^2 e^{2t}}, \frac{(1 + s^2)e^t}{1 + s^2 e^{2t}} \right)$$

で与えられる H^2 の曲線 γ_s が測地線であることを確かめよ.

(2) $\gamma = \gamma_0$ に沿った Jacobi 場 $J(t) = \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s} \Big|_{s=0}$ を考える. また, 点 $\gamma(0) = (0, 1)$ における接ベクトル $(1, 0) \in T_{(0,1)}H^2$ を平行移動して得られる γ に沿った単位平行ベクトル場を $e_2 = e_2(t)$ とする. $J(t) = (\sinh t)e_2(t)$ を示せ.

(3) $J(t)$ が Jacobi 方程式をみたすことを確かめよ.

10.4 測地線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ に沿って $\gamma(a)$ と $\gamma(b)$ が共役ではないと仮定する. そのとき, 任意に与えられた $v \in T_{\gamma(a)}M$, $w \in T_{\gamma(b)}M$ に対して, $J(a) = v$, $J(b) = w$ をみたす γ に沿った Jacobi 場 $J(t)$ がただ一つ存在することを示せ. [ヒント: $v = 0$ として証明すれば十分である (なぜか?). $J(a) = 0$ をみたすすべての Jacobi 場がなすベクトル空間を $\mathcal{J}_0$ とする. $J \mapsto J(b)$ で定義される $\mathcal{J}_0$ から $T_{\gamma(b)}M$ への線型写像を考えよ.]

10.5 Riemann 多様体 (M, g) の **Killing ベクトル場** とは, その任意の局所フロー $\varphi_t: U \rightarrow M$ (U は開集合, $-\varepsilon < t < \varepsilon$) が $\varphi_t^* g = g|_U$ をみたすようなもののことである.

(1) Killing ベクトル場を測地線 γ に制限したものは Jacobi 場であることを示せ.

(2) 連結な Riemann 多様体 (M, g) では, Killing ベクトル場 X がある点 $p \in M$ において $X(p) = 0$ かつ $\nabla_v X = 0$ ($v \in T_p M$ は任意) をみたすならば, M 全体で $X = 0$ であることを示せ.

* V が接束 TM への写像 $I_1 \times I_2 \rightarrow TM$ として C^∞ 級ということ. $V(s, t)$ を局所座標系を用いて表示したときの各成分が (s, t) に関して C^∞ 級ということだといってもよい.