

1 多様体の復習, ベクトル束

- 1.1 2次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考える. $p_{\pm} = (0, 0, \pm 1)$ と書く. $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ に対し平面 $z = \sin \theta$ による S^2 の切り口は半径 $\cos \theta$ の円周だから, $S^2 \setminus \{p_+, p_-\}$ の点は $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ と $\mathbb{R}^2$ の単位ベクトル (s, t) を用いて $(s \cos \theta, t \cos \theta, \sin \theta)$ と一意的に表せることに注意する. $p_{\pm}$ に対しては (s, t) が一意的でないことを許容すれば, S^2 の任意の点が $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ と $\mathbb{R}^2$ の単位ベクトル (s, t) を用いて $(s \cos \theta, t \cos \theta, \sin \theta)$ と表される.

$U = S^2 \setminus \{p_-\}$, $V = S^2 \setminus \{p_+\}$ とおき, $\mathbb{R}^2$ の原点を中心とする半径 π の開球を B_{π} と書いて, 写像 $\varphi: U \rightarrow B_{\pi}$ および $\psi: V \rightarrow B_{\pi}$ を

$$\varphi(s \cos \theta, t \cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)(s, t), \quad \psi(s \cos \theta, t \cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)(s, t)$$

と定義する (右辺では (s, t) をベクトルとみて定数倍している).

- (1) $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ が S^2 の (C^∞ 級) アトラスを与えることを確かめよ.
- (2) アトラス $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ が S^2 の通常の C^∞ 級微分構造を与えることを示せ. [ヒント. ステレオグラフィック射影により得られる局所座標系と比較する.]

$$(u, v) \mapsto \tan \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2} \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

が C^∞ 級微分同相 $B_{\pi} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を定めていることを確かめればよい. $r^{-1} \tan(r/2)$ を r^2 の関数とみると $r^2 = 0$ の近傍において C^∞ 級であることを示し, 利用する.]

(本問の $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ を S^2 の **正距方位図法によるアトラス** とよぶことにしておく. 容易に高次元化できることにも注意せよ.)

- 1.2* E を多様体 M 上のランク r のベクトル束とする. ベクトル束の定義により, 任意の点 $p \in M$ に対し, そのある開近傍 U において局所自明化 $\Phi: \pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^r$ が存在する. 局所自明化の定義により Φ はファイバー E_q を $\{q\} \times \mathbb{R}^r$ にうつす. e_α ($\alpha = 1, 2, \dots, r$) を $\mathbb{R}^r$ の標準基底とし, $\xi_\alpha(q) = \Phi^{-1}(q, e_\alpha)$ によって ξ_α を定めると, 各 ξ_α はベクトル束 E の U 上における切断である.

一般に, 開集合 U 上における E の r 個の切断 $\xi_1, \dots, \xi_r$ であって, 各点 $q \in U$ において $\xi_1(q), \dots, \xi_r(q)$ がファイバー E_q の基底になっているようなものを, ベクトル束 E の U 上における **局所枠** (local frame) という. 前段落の記述は, E の局所自明化 Φ が与えられると, それから自然に定まるような局所枠があるということをいっている.

逆に, 開集合 U 上における局所枠 $\xi_1, \dots, \xi_r$ が与えられると, $q \in U$ に対し E_q の任意

のベクトル v は $v = \sum_{\alpha=1}^r a^\alpha \xi_\alpha(q)$ と一意的に表されるから、 E_q 上では

$$\Phi\left(\sum_{\alpha=1}^r a^\alpha \xi_\alpha(q)\right) = (q, (a^\alpha))$$

と定めることによって写像 $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ を定義できる．この Φ がベクトル束 E の U における局所自明化を与えていることを証明せよ．

(一言でいえば、局所自明化を与えることと局所枠を与えることは等価だといいたいのである．)