§1　位相空間の復習

1. 位相空間 X の部分集合 A に相対位相を与える．そのとき，包含写像 $i\colon A \to X$ が連続写像であることを示せ．

2. (1) X を Hausdorff 空間とし，K を X のコンパクト部分集合とする．そのとき K が X の閉集合であることを示せ．

   (2) X をコンパクト位相空間，Y を Hausdorff 空間とする．そのとき任意の全単射連続写像 $f\colon X \to Y$ は同相写像となることを示せ．

3. 位相空間 X が「任意の点 $p \in X$ に対し，0 以上の整数 n を適切に選べば，p を含む X の開集合 U であって，$\mathbb{R}^n$ のある開集合 U' と同相なものが存在する」という性質をもつとき，X は**局所 Euclid 的**（locally Euclidean）であるという．なお，$\mathbb{R}^0$ は一点だけからなる位相空間と考える．

   あらためて n を一つの与えられた正整数とする．$\mathbb{R}^n$ と 2 元からなる離散空間 $\{-1,1\}$ の積空間 $\mathbb{R}^n \times \{-1,1\}$ を X と書く．さらに X に，「任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ について $(x,-1)$ と $(x,1)$ を同一視する」ような同値関係 $\sim$ を与える．すなわち

   $$(x,b) \sim (x',b') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x,b) = (x',b') \text{ または } x = x' \neq 0$$

   と定める．$X/\sim$ に X の商空間としての位相を与える．

   (1) $X/\sim$ が局所 Euclid 的であることを示せ．

   (2) $X/\sim$ が Hausdorff 空間ではないことを示せ．

位相空間 X が**弧状連結**（path-connected）であるとは，X の任意の 2 点 x，y に対し，それらを結ぶ道（path）$c\colon [0,1] \to X$ が存在することをいう．

4. 弧状連結な位相空間は連結である．そのことを証明せよ．

5. 位相空間 X の任意の点が弧状連結な近傍をもつとき，X は**局所弧状連結**（locally path-connected）であるという．連結かつ局所弧状連結な位相空間は弧状連結であることを証明せよ．

§2　多変数の微積分の復習

6.　$\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された関数 f について，すべての偏導関数 $\partial f/\partial x_1$，$\partial f/\partial x_2$，……，$\partial f/\partial x_n$ が存在し，それらが連続であるとする．そのとき f も U で連続であることを示せ．

7.　$\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された C^2 級関数 f について

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

が成り立つことを示せ．

8.　$\mathbb{R}^2$ における半直線 $\{(x,0) \mid x \leqq 0\}$ の補集合 U において，原点 O から点 $P=(x,y)$ までの距離を r とし，x 軸の正の方向から測った半直線 OP までの回転角を θ とする（ただし $-\pi < \theta < \pi$）．U で定義された C^2 級関数 f について，$z = f(x,y)$ と書き，これを x，y の関数であると同時に r，θ の関数でもあるとみなす．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

であることを示せ．

9.　U，V を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$g\colon U \to V$ は C^1 級全単射で，逆写像 g^{-1} も C^1 級であるとする．また $f\colon V \to \mathbb{R}^m$ を C^1 級写像とする．そのとき，U の任意の点 x に対して，f の $g(x)$ における Jacobi 行列 $(Jf)_{g(x)}$ の階数と $f \circ g$ の x における Jacobi 行列 $(J(f \circ g))_x$ の階数が一致することを示せ．

10.　$a \neq -3$ を実数の定数とし，$\mathbb{R}^3$ で定義された関数 $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + axyz$ を考えて

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$$

とおく．原点 $(0,0,0)$ 以外の S の任意の点 (x_0,y_0,z_0) に対し，以下のいずれかが成り立つことを示せ．

(i)　(x_0,y_0) を含む $\mathbb{R}^2$ の開集合 U，z_0 を含む $\mathbb{R}$ の開集合 V，それと U で定義された C^∞ 級関数 φ であって，任意の $(x,y) \in U$ と $z \in V$ について $(x,y,z) \in S \iff z = \varphi(x,y)$ をみたすようなものが存在する．

(ii)　(y_0,z_0) を含む $\mathbb{R}^2$ の開集合 U，x_0 を含む $\mathbb{R}$ の開集合 V，それと U で定義された C^∞ 級関数 φ であって，任意の $(y,z) \in U$ と $x \in V$ について $(x,y,z) \in S \iff x = \varphi(y,z)$ をみたすようなものが存在する．

(iii)　(x_0,z_0) を含む $\mathbb{R}^2$ の開集合 U，y_0 を含む $\mathbb{R}$ の開集合 V，それと U で定義された C^∞ 級関数 φ であって，任意の $(x,z) \in U$ と $y \in V$ について $(x,y,z) \in S \iff y = \varphi(x,z)$ をみたすようなものが存在する．

§3　多様体の定義

11.　円周 $S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ の座標近傍系の定め方の一例を具体的に説明し，それが実際に C^∞ 級座標近傍系になっていることを確かめよ．

12.　球面 $S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ の座標近傍系の定め方の一例を具体的に説明し，それが実際に C^∞ 級座標近傍系になっていることを確かめよ．

13.　n 次元球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ において，立体射影を用いた C^∞ 級座標近傍系 $\mathcal{T} = \{ (U, \varphi), (V, \psi) \}$ を考える．ただし記号は『多様体の基礎』p. 47 の例 4 に従う．すなわち，$U = S^n \setminus \{ (0, \dots, 0, 1) \}$, $V = S^n \setminus \{ (0, \dots, 0, -1) \}$ とし，局所座標系 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$，$\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ を次式で与える：

$$\varphi(x', x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} x', \qquad \psi(x', x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}} x'.$$

ここで x' という記号は $\mathbb{R}^n$ の元を表している．

そのとき『多様体の基礎』p. 49 の式 (6.13) にあるように，座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ は

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(y) = \frac{1}{|y|^2} y, \qquad y \in \varphi(U \cap V) = \mathbb{R}^n \setminus \{ 0 \}$$

により与えられる（この変換を球面 S^n に関する**反転**とよぶことが多い）．この座標変換の式を求める計算の詳細を説明せよ．

［コメント：この結論によれば，ベクトル y と $(\psi \circ \varphi^{-1})(y)$ は平行で，またそれらの内積は 1 であることがわかる．それを計算によらずに初等幾何的考察によって説明することはできるか？］

14.　M を m 次元 C^∞ 級多様体，N を n 次元 C^∞ 級多様体とし，各々の C^∞ 級座標近傍系 $\mathcal{S} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$，$\mathcal{T} = \{ (V_\beta, \psi_\beta) \}_{\beta \in B}$ をとる．すると積空間 $M \times N$ は，$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q))$ と定めると，

$$\{ (U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta) \}_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$$

という座標近傍系によって $m + n$ 次元 C^∞ 級多様体になる．そのことを証明せよ．

15.　積多様体 $T^2 = S^1 \times S^1$ を（2 次元の）**トーラス**という．$S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ なので，T^2 は集合としては

$$\{ (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + y_1^2 = 1,\ x_2^2 + y_2^2 = 1 \}$$

という $\mathbb{R}^4$ の部分集合だが，その C^∞ 級座標近傍系としてどのようなものがとれるか．具体的に記述せよ．

§4　同値な座標近傍系

Hausdorff 空間 M に与えられた二つの n 次元 C^∞ 級座標近傍系 $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ が**同値**であるとは，『多様体の基礎』定義 6.V（p. 51）にあるように，和集合 $\mathcal{S}\cup\mathcal{T}$ がふたたび M の C^∞ 級座標近傍系になっていることをいう．

次の問題は同値でない C^∞ 級座標近傍系について扱うものだが，あわせて，少し先で学ぶ「C^∞ 級微分同相」の概念を理解していることも前提としているので注意すること．

16.　$\mathbb{R}$ の一つの座標近傍系として $\mathcal{S}=\{(\mathbb{R},\mathrm{id})\}$ をとる．また，もう一つの座標近傍系として $\mathcal{T}=\{(\mathbb{R},\varphi)\}$ をとる．ただし φ は

$$\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad \varphi(x)=x^3$$

という写像とする．$\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ はそれぞれ C^∞ 級座標近傍系になっている．

(1)　$\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ が同値な C^∞ 級座標近傍系ではないことを確かめよ．

(2)　$\mathbb{R}$ を各々の C^∞ 級座標近傍系によって C^∞ 級多様体とみなしたものを，それぞれ $(\mathbb{R},\mathcal{S})$, $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ と書く．$(\mathbb{R},\mathcal{S})$ と $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ が C^∞ 級微分同相であることを証明せよ．

M に与えられた C^∞ 級座標近傍系 $\mathcal{S}$ に対し，『多様体の基礎』定義 6.VI にあるように，$\mathcal{S}$ と同値なすべての C^∞ 級座標近傍系の和集合 $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ を，$\mathcal{S}$ からきまる M の C^∞ 級**極大座標近傍系**という．以下ではこの概念の言い換えについて考えてみる．

M を n 次元 C^∞ 級多様体とし，$\mathcal{S}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ をその C^∞ 級座標近傍系とする．M に $\mathcal{S}$ とは無関係に与えられた座標近傍 (V,ψ) について，$\mathcal{S}'=\mathcal{S}\cup\{(V,\psi)\}$ がふたたび M の C^∞ 級座標近傍系となるとき，(V,ψ) は $\mathcal{S}$ に**許容される**座標近傍であるということにしよう．

17.　M を C^∞ 級多様体とし，$\mathcal{S}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ をその C^∞ 級座標近傍系とする．M の座標近傍 (V,ψ) が $\mathcal{S}$ に許容されるためには，次の条件 (i), (ii) をみたす A の部分集合 A' が存在することが必要十分であることを証明せよ．

(i)　V は $(U_\alpha)_{\alpha\in A'}$ によって覆われる．

(ii)　$U_\alpha\cap V\neq\varnothing$ をみたす任意の $\alpha\in A'$ について，座標変換写像 $\varphi_\alpha\circ\psi^{-1}$, $\psi\circ\varphi_\alpha^{-1}$ はいずれも C^∞ 級写像である．

18.　$(M,\mathcal{S})$ を C^∞ 級多様体とする．$\mathcal{S}$ に対する極大座標近傍系は，$\mathcal{S}$ に許容されるような M のすべての座標近傍からなる集合に一致する．そのことを示せ．

問題 18 により，われわれが導入した「$\mathcal{S}$ に許容される座標近傍」の概念は，『多様体の基礎』p. 54 にある「M の*C^∞ 級座標近傍」の概念に一致する．

*正確には「$(M,\mathcal{S})$ の」と言うべきであろう．

§5　微分可能な関数，微分可能な写像

19.　n 次元球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ において，関数 h_i（$i = 1$，……，n，$n + 1$）を

$$h_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_i$$

によって定義する．h_i が S^n 上の C^∞ 級関数であることを確かめよ．

20.　M を C^∞ 級多様体とし，$f\colon M \to \mathbb{R}$ および $g\colon M \to \mathbb{R}$ を M 上の C^∞ 級関数とする．そのとき，$f + g\colon M \to \mathbb{R}$ および $fg\colon M \to \mathbb{R}$ を

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p), \qquad (fg)(p) = f(p)g(p) \qquad (p \in M)$$

によって定義すれば，$f + g$，fg もやはり M 上の C^∞ 級関数であることを証明せよ．
［コメント：これらの演算により M 上の C^∞ 級関数全体の集合は可換環をなす．単位元もあるが，それはどんな関数か？］

21.　n，k を正整数とする．n 次元球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と $n + k$ 次元球面 $S^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ に対し，次の式で定義される単射 $i\colon S^n \to S^{n+k}$ を考える：

$$i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k\ 個}).$$

この $i\colon S^n \to S^{n+k}$ が C^∞ 級写像であることを示せ．

22.　M, N を C^∞ 級多様体とし, $(W_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を M の任意の開被覆とする. そのとき, 写像 $f\colon M \to N$ が C^∞ 級写像であるためには，f を各々の W_λ に制限した $f|_{W_\lambda}\colon W_\lambda \to N$ が C^∞ 級写像であることが必要十分である．このことを証明せよ．

§6 Riemann 球面（複素多様体の例として）

球面 $S^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1 \}$ を Riemann 球面とよばれる 1 次元複素多様体とみなすことについて以下で説明する．『多様体の基礎』の §6 例 5（p. 49）や §7 例 7（p. 71）に従う．

まず，$U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$，$V = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ として，それぞれを $(0,0,1)$ および $(0,0,-1)$ に関する立体射影を用いて $\mathbb{C}$ と「同一視」する．すなわち，次の式で定義される写像 $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$, $\psi\colon V \to \mathbb{C}$ を考える：

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}, \qquad \psi(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{1+x_3} + i\frac{x_2}{1+x_3}.$$

さらに，$\overline{\psi}\colon V \to \mathbb{C}$ を $\overline{\psi}(x_1,x_2,x_3) = \overline{\psi(x_1,x_2,x_3)}$ によって定義する．ここでは $\mathcal{S} = \{(U,\varphi),(V,\overline{\psi})\}$ を S^2 の座標近傍系として採用する．

そうすると，問題 23 でわかるように，座標変換の写像 $\overline{\psi}\circ\varphi^{-1}$，$\varphi\circ\overline{\psi}^{-1}$ は正則関数になる．このことをもって，$(S^2,\mathcal{S})$ は 1 次元複素多様体であるというのである（複素多様体の形式的定義はここでは述べない）．この $(S^2,\mathcal{S})$ のことを **Riemann 球面**といい，$\hat{\mathbb{C}}$ で表す*.

座標変換の計算に向けて記号の準備をする．φ の終域 $\mathbb{C}$ の点を一般に z で，$\overline{\psi}$ の終域 $\mathbb{C}$ の点を一般に w で表すことにする．また，これら二つの $\mathbb{C}$ を，区別のために $\mathbb{C}_z$，$\mathbb{C}_w$ と書くことにしよう．φ は U と $\mathbb{C}_z$ の「同一視」を与え，$\overline{\psi}$ は V と $\mathbb{C}_w$ の「同一視」を与えているのである．$\mathbb{C}_z$，$\mathbb{C}_w$ から原点 0 を除いた集合をそれぞれ $\mathbb{C}_z^*$，$\mathbb{C}_w^*$ で表すと，$\varphi(U\cap V) = \mathbb{C}_z^*$，$\overline{\psi}(U\cap V) = \mathbb{C}_w^*$ である．

23. (1) 座標変換の写像 $\overline{\psi}\circ\varphi^{-1}\colon \mathbb{C}_z^* \to \mathbb{C}_w^*$, $\varphi\circ\overline{\psi}^{-1}\colon \mathbb{C}_w^* \to \mathbb{C}_z^*$ がそれぞれ $\overline{\psi}\circ\varphi^{-1}(z) = 1/z$, $\varphi\circ\overline{\psi}^{-1}(w) = 1/w$ で与えられることを確かめよ．
    (2) $\psi\circ\varphi^{-1}\colon \mathbb{C}_z^* \to \mathbb{C}^*$ を考える．$\psi\circ\varphi^{-1}(z)$ を求めよ．今回の議論で，S^2 の座標近傍として (V,ψ) を採用しないのはなぜか．

24. U に対する（Alexandrov の）一点コンパクト化を $\hat{U}$ と書く．また，この一点コンパクト化の操作により付け加えられた点を ∞ と書く．$\Phi\colon S^2 \to \hat{U}$ を，U の点 p に対しては $\Phi(p) = p$ とし，$\Phi((0,0,1)) = \infty$ として定義する．この Φ が同相写像であることを証明せよ．

$\overline{\psi}\circ\varphi^{-1}$，$\varphi\circ\overline{\psi}^{-1}$ が正則関数であることから，$\hat{\mathbb{C}}$ の開集合で定義された複素数値関数や $\hat{\mathbb{C}}$ の開集合のあいだで定義された写像について「正則性」の概念が自然に定義される．

25. f を有界な整関数（$\mathbb{C}$ 全体で定義された正則関数）とする．
    (1) f の定義域 $\mathbb{C}$ を，$\mathbb{C}_z$ と同一視して，さらに φ を通じて Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の開集合 U と同一視する．そのとき，f が $\hat{\mathbb{C}}$ 全体で定義された正則関数 $\hat{f}$ に拡張されることを示せ．
    (2) $\hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト性と正則関数の最大値原理を用いて，f が定数関数であることを結論せよ（**Liouville の定理**）．

---

* 「$\hat{\mathbb{C}}$」という記号には，$\mathbb{C}$（次の段落で導入する記号を用いれば $\mathbb{C}_z$）と同一視された U に，その上にない点 $(0,0,1)$ を付け加えたのが $\hat{\mathbb{C}}$ だという意味がこめられている．U 自体のことを $\mathbb{C}$ と書いてしまうことも多い．また，付け加えた点 $(0,0,1)$ を ∞ と書いて**無限遠点**とよぶ（問題 24 も参照）．

§7　部分多様体の定義

m, n を正整数とし，$m > n$ とする．m 次元 C^∞ 級多様体 M の空でない部分集合 N について，N が M の n 次元 C^∞ 級**部分多様体**であるとは，任意の $q \in N$ に対し，q を含む M の C^∞ 級座標近傍 $(U, \varphi) = (U; x_1, \ldots, x_m)$ であって*,

$$U \cap N = \{\, p \in U \mid x_{n+1}(p) = \cdots = x_m(p) = 0 \,\} \tag{$*$}$$

が成り立つようなものが存在することをいう（『多様体の基礎』定義 12.III（p. 157））．

26.　f を $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級関数とする．f のグラフ

$$\Gamma_f = \{\, (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in U \times \mathbb{R} \mid x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n) \,\}$$

が $U \times \mathbb{R}$ の n 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

27.　n 次元球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ が $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分多様体であることを示せ．

C^∞ 級多様体 M の C^∞ 級部分多様体 N はふたたび C^∞ 級多様体である．これは『多様体の基礎』の命題 12.2（p. 157）だが，その証明によれば，次のようなものが N の C^∞ 級座標近傍になる．任意の $q \in N$ に対し，部分多様体の定義によって，q を含む M の C^∞ 級座標近傍 $(U, \varphi) = (U; x_1, \ldots, x_m)$ であって $(*)$ をみたすようなものがとれる．そこで $(U \cap N; x_1, \ldots, x_n)$ を考えると，これは N の C^∞ 級座標近傍である．この形の C^∞ 級座標近傍をすべて集めることにより，N の C^∞ 級座標近傍系がえられる．

28.　M を C^∞ 級多様体とし，N を M の C^∞ 級部分多様体とする．そのとき，M 上の任意の C^∞ 級関数 f に対し，f の N への制限 $f|_N$ が N 上の C^∞ 級関数であることを証明せよ．

*座標近傍 (U, φ) のことを，$\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ を成分表示して $(x_1, \ldots, x_m)$ と書いた上で，$(U; x_1, \ldots, x_m)$ のように表すこともある．この場合，各 x_i は U 上で定義された関数である．

§8　接空間の定義

接空間（『多様体の基礎』では「接ベクトル空間」という語が使われている）は，n 次元 C^∞ 級多様体 M の各点 p に付随する n 次元実ベクトル空間である*．ここではそれを T_pM という記号で書く（『多様体の基礎』では $T_p(M)$ と書かれている）．T_pM の元は**接ベクトル**とよばれる．

T_pM の定義が少々ややこしいのだが，重要なことは，最終的に次に述べる事実をおさえて，また相互の関係を理解しておくことであろう．

(i)　$t=0$ において点 p を通るような C^∞ 級曲線 $c\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ があるとき，$t=0$ における c の**速度ベクトル** v_c（または $\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ と書く）というものがある．これは T_pM の元である．また，T_pM の元はすべて，C^∞ 級曲線の速度ベクトルとして表すことができる．

(ii)　点 p を含む C^∞ 級座標近傍 $(U,\varphi)=(U;x_1,\dots,x_n)$ があるとき，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p,\quad \cdots\quad,\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$$

という n 個の T_pM の元がある．これらは線型独立であり，T_pM の基底になっている．

(iii)　点 p のまわりで定義された C^∞ 級関数 f に対し実数 $v(f)$ を与えるような対応であって，局所的，線型，かつ Leibniz 則をみたすようなものを点 p における**形式的な方向微分**とよぶことにする（各条件の意味について詳しくは『多様体の基礎』定義 8.I（p. 80）．**導分**という言葉を使うことも多い）．点 p における形式的な方向微分全体の集合は T_pM に一致する†．

(i)，(ii)，(iii) のどれに基づいて T_pM を定義することも可能だが，『多様体の基礎』では (iii) に基づく方法をとっている．われわれも以下この立場をとる．その上で，「(i)，(ii)，(iii) の相互の関係を理解する」とはどういうことか考えてみよう．

29.　$t=0$ において点 p を通るような C^∞ 級曲線 $c\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ に対し，v_c を，点 p のまわりで定義された C^∞ 級関数 f に対し $(df(c(t))/dt)|_{t=0}$ という実数を与える対応とする．v_c が点 p における形式的な方向微分であることを確かめよ．

30.　$(U;x_1,\dots,x_n)$ を点 p を含む C^∞ 級座標近傍とする．

(1)　$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ は点 p におけるある形式的な方向微分を表す．その定義を説明せよ．

(2)　点 p における任意の形式的な方向微分 v が $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p$，$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)_p$，$\cdots$，$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ の線型結合として表されることを証明せよ．［ヒント：『多様体の基礎』の付録 A にある証明を説明すればいい．］

31.　接空間 T_pM の任意のベクトル（すなわち点 p における形式的な方向微分）v に対し，$t=0$ において点 p を通るようなある C^∞ 級曲線 $(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ が存在して，$v=v_c$ であることを証明せよ．［ヒント：『多様体の基礎』pp. 89–90 の説明を一般化すればいい．］

---

*M は C^∞ 級多様体でなく C^1 級多様体でも十分だが，話を単純にするために C^∞ 級としておく．

†こんなふうに単純に述べてしまえるのは，C^∞ 級多様体を考えているからである．『多様体の基礎』p. 86 の注意を参照．

§9　接空間の実例 (1)　Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ の場合

n 次元 C^∞ 級多様体 M の点 p を含む二つの座標近傍* $(U; x_1, x_2, \ldots, x_n)$，$(V; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ があるとき，接空間 T_pM に二組の基底

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \right\rangle, \qquad \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p \right\rangle$$

が定まる．これらはどちらも基底だから，必然的に各 $(\partial/\partial x_i)_p$ は $(\partial/\partial y_1)_p$，$(\partial/\partial y_2)_p$，……，$(\partial/\partial y_n)_p$ の線型結合として表される．その表示は『多様体の基礎』命題 8.4（p. 85）で具体的に与えられている．ところで，実際に与えられた多様体と二つの座標近傍に対してこの「基底変換」を表す関係式を求めるときは，命題 8.4 を適用する方法のほかに，この問題集 §8 の (i) に基づく方法（曲線の速度ベクトルを各々の局所座標系を用いて表す方法），および (iii) に基づく方法（形式的な方向微分として扱う方法）があることを知っておくといいだろう．この §9 では Euclid 平面において，次の §10 では球面において，三つの方法を実際に試してみたい．

さて，Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ を考える．$U = \mathbb{R}^2$ として通常の直交座標系を (x, y) とすれば，一つの座標近傍 $(U; x, y)$ が得られる．また $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ として，V に極座標系 (r, θ) を定める（ただし $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ とする）．$(V; r, \theta)$ がここで考えるもう一つの座標近傍である．

32.　p を V の点とする．

(1)　『多様体の基礎』命題 8.4 を用いて，$(\partial/\partial r)_p$，$(\partial/\partial\theta)_p$ をそれぞれ $(\partial/\partial x)_p$ と $(\partial/\partial y)_p$ の線型結合として表せ．

(2)　(1) の結果を「逆に解く」のではなく，再度『多様体の基礎』命題 8.4 を用いることにより，$(\partial/\partial x)_p$，$(\partial/\partial y)_p$ をそれぞれ $(\partial/\partial r)_p$ と $(\partial/\partial\theta)_p$ の線型結合として表せ．

(i) に基づく方法（曲線の速度ベクトルを各々の局所座標系を用いて表す方法）は『多様体の基礎』§8 例 2（pp. 90–93）で説明されているので，よく理解しておいてほしい．最後に (iii) に基づく方法（形式的な方向微分として扱う方法）を考える．

33.　p を V の点とする．

(1)　$\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)_p = a\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_p + b\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_p$，$\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)_p = c\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_p + d\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_p$ とおく．これらの 2 式の各辺を点 p における形式的な方向微分とみて，関数 x および関数 y に作用させることにより，定数 a，b，c，d の値を求めよ．

(2)　$\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_p = a'\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)_p + b'\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)_p$，$\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_p = c'\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)_p + d'\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)_p$ とおく．これらの 2 式の各辺を点 p における形式的な方向微分とみて，関数 x および関数 y に作用させることにより，定数 a'，b'，c'，d' の値を求めよ．

---

*以下，C^∞ 級多様体を論じるとき，考える座標近傍はすべて C^∞ 級座標近傍であるとし，いちいち C^∞ 級と断らない．この約束は『多様体の基礎』p. 78 の脚注と同じ．

§10　接空間の実例 (2)　球面 S^2 の場合

前節に引き続き，今度は 2 次元球面 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ において，二つの座標近傍に対する接空間の基底変換を表す関係式を求めることについて考える．

$U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 > 0\}$ とし，U には『多様体の基礎』§6 例 4（p. 47）に従って立体射影による局所座標系を導入する．すなわち

$$(y_1, y_2) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}\right)$$

として座標近傍 $(U; y_1, y_2)$ を得る．また，V には“緯度と経度による局所座標系”を導入する．より正確には，いわゆる球面座標系の球面への制限を考える．すなわち

$$x_1 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad x_2 = \sin\theta\sin\varphi, \qquad x_3 = \cos\theta$$

によって θ, φ を定める（ただし，θ は $(0, \pi)$ を，φ は $(-\pi/2, \pi/2)$ を動くものとする）*．つまり

$$\theta = \arccos x_3, \qquad \varphi = \arctan\frac{x_2}{x_1}$$

である．こうしてもう一つの座標近傍 $(V; \theta, \varphi)$ を得る．

34.　p を $U \cap V$ の点（すなわち V の点）とする．『多様体の基礎』命題 8.4 を用いて，$(\partial/\partial\theta)_p$, $(\partial/\partial\varphi)_p$ をそれぞれ $(\partial/\partial y_1)_p$ と $(\partial/\partial y_2)_p$ の線型結合として表せ．

35. (1)　V において，θ を $(0, \pi)$ を動くパラメタとし，φ を $(-\pi/2, \pi/2)$ に属す定数として，$c_1(\theta) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ によって定義される曲線 $c_1 : (0, \pi) \to V$ を考える．一般的な θ の値に対して，c_1 の速度ベクトル $dc_1/d\theta$ を二通りの仕方で求めることにより，$(\partial/\partial\theta)_{c_1(\theta)}$ を $(\partial/\partial y_1)_{c_1(\theta)}$ と $(\partial/\partial y_2)_{c_1(\theta)}$ の線型結合として表せ．

(2)　V において，θ を $(0, \pi)$ に属す定数とし，φ を $(-\pi/2, \pi/2)$ を動くパラメタとして，$c_2(\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ によって定義される曲線 $c_2 : (-\pi/2, \pi/2) \to V$ を考える．一般的な φ の値に対して，c_2 の速度ベクトル $dc_2/d\varphi$ を二通りの仕方で求めることにより，$(\partial/\partial\varphi)_{c_2(\varphi)}$ を $(\partial/\partial y_1)_{c_2(\varphi)}$ と $(\partial/\partial y_2)_{c_2(\varphi)}$ の線型結合として表せ．

36.　p を V の点として，

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_p = a\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p + b\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)_p = c\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p + d\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p$$

とおく．これらの 2 式の各辺を点 p における形式的な方向微分とみて，適切に選んだ 2 つの関数に作用させることにより，定数 a，b，c，d の値を求めよ．

---

*φ が経度にあたる．θ が緯度にあたるが，基準点は通常の「緯度」とは異なり，赤道ではなく北極にあることに注意．別にそうしなくてもよいのだが，慣習に従った．

§11　写像の微分

37.　n，k を正整数とする．n 次元球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と $n+k$ 次元球面 $S^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ に対し，

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k\,個})$$

で定義される写像 $f\colon S^n \to S^{n+k}$ を考える．S^n の任意の点 p において，微分 $(df)_p$ が単射であることを確かめよ．

38.　M，N，Q を C^∞ 級多様体，$f\colon M \to N$，$g\colon N \to Q$ を C^∞ 級写像とする．そのとき任意の点 $p \in M$ において，合成写像 $g \circ f$ の微分 $(d(g \circ f))_p\colon T_pM \to T_{g(f(p))}Q$ が写像の微分の合成 $(dg)_{f(p)} \circ (df)_p$ に一致することを示せ．

39.　3 次元球面 $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ と 2 次元球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ に対し，写像 $f\colon S^3 \to S^2$ を

$$f(x, y, z, w) = (2(xz + yw), 2(xw - yz), z^2 + w^2 - x^2 - y^2)$$

によって定義する．

(1)　f が実際に S^3 から S^2 への写像であることを確かめよ．また，f が C^∞ 級写像であることを証明せよ．

(2)　S^3 の点 $p = (1, 0, 0, 0)$ において微分 $(df)_p$ が全射であることを確かめよ．

40.　$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = z(z+1)$ で定義される写像とする．$z = x + iy$ を (x, y) へと対応させることにより $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視すれば，f は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像ともみなされる．

(1)　一般の点 $z = x + iy$ における，$T_z\mathbb{R}^2$ の基底 $\langle (\partial/\partial x)_z, (\partial/\partial y)_z \rangle$ に関する f の Jacobi 行列 $(Jf)_z$ を求めよ．

(2)　微分 $(df)_z$ が線型同型写像でない z をすべて求めよ．

41.　$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = z(z+1)$ で定義される写像とする．

ここで Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ を考える．つまり，$\hat{\mathbb{C}}$ とは集合としては S^2 であって，$U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ および $V = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ がそれぞれ

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}, \qquad \overline{\psi}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 + x_3} - i\frac{x_2}{1 + x_3}$$

によって $\mathbb{C}$ と同一視されているものとする．U と同一視された $\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}_z$ と書き，V と同一視された $\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}_w$ と書く．以下では単に $\mathbb{C}$ と書いたら $\mathbb{C}_z$ のことを指すものと約束する．また，U 上にない $\hat{\mathbb{C}}$ の唯一の点を ∞ と書く．

f を $\mathbb{C}_z$ から $\mathbb{C}_z$ への写像とみなす．

(1)　f を連続写像 $\tilde{f}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ へと一意的に拡張することができて，さらに $\tilde{f}(\infty) = \infty$ となることを示せ．また，$\tilde{f}$ が正則写像であることを示せ．

(2)　微分 $(d\tilde{f})_\infty\colon T_\infty\hat{\mathbb{C}} \to T_\infty\hat{\mathbb{C}}$ は線型同型写像だろうか．判定せよ．

§12　射影空間

$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ が定める $\mathbb{P}^n$ の点を，『多様体の基礎』にならって $(x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1})$ という記号であらわす（p. 143）．これを $\mathbb{P}^n$ の点の**同次座標**ないし**斉次座標**という．通常の意味での座標ではないので注意すること．

42.　$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ から $\mathbb{P}^1$ への写像 $f\colon S^1 \to \mathbb{P}^1$ を

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos(\theta/2) : \sin(\theta/2))$$

によって定義する．

(1)　f が well-defined であることを確かめよ．

(2)　f が C^∞ 級微分同相写像であることを示せ．

43.　写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n$ を

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1 : x_1 : x_2 : \cdots : x_n)$$

により定義する．

(1)　像 $f(\mathbb{R}^n)$ が $\mathbb{P}^n$ の開集合であることを示せ．

(2)　f が $\mathbb{R}^n$ から $f(\mathbb{R}^n)$ への C^∞ 級微分同相写像であることを示せ．ただし，$f(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{P}^n$ の開部分多様体とみなしている．

(3)　$f(\mathbb{R}^n)$ が $\mathbb{P}^n$ の稠密な部分集合であることを示せ．

44.　実数を成分とする $n+1$ 次正則行列全部のなす群を $GL(n+1, \mathbb{R})$ と書く．$A \in GL(n+1, \mathbb{R})$ に対し，写像 $f_A\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ を

$$f_A([x]) = [Ax], \qquad x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

によって定義する．f_A のことを正則行列 A の定める $\mathbb{P}^n$ 上の**射影変換**とよぶ．

(1)　写像 f_A が well-defined であることを確かめよ．

(2)　2 つの行列 A，$B \in GL(n+1, \mathbb{R})$ の定める射影変換 f_A，f_B が一致するための，A，B に関する必要十分条件を与えよ．

(3)　任意の 2 点 p，$q \in \mathbb{P}^n$ に対し，$f_A(p) = q$ となるような $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$ が存在することを証明せよ．（これを指して，$GL(n+1, \mathbb{R})$ は $\mathbb{P}^n$ に推移的に作用しているという．）

45.　任意の正則行列 $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$ に対し，A の定める射影変換 $f_A\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ が C^∞ 級微分同相写像であることを示せ．

46.　自然な射影 $\pi\colon S^n \to \mathbb{P}^n$ を考える．S^n の任意の点 p において，微分 $(d\pi)_p\colon T_pS^n \to T_{\pi(p)}\mathbb{P}^n$ が線型同型写像であることを示せ．［ヒント：任意の点について直接確かめるのは面倒．射影変換をうまく使って，一点 p における $(d\pi)_p$ の線型同型性に帰着する．］

§13 群の作用による商多様体

G を群，M を C^∞ 級多様体とする．各 $g \in G$ に対し $\varphi(g)$ という M から M への C^∞ 級写像が与えられており，この対応 φ が以下の 2 つの条件をみたすとき，φ を G の M への**作用**とよぶ*.

(i) $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$.

(ii) G の単位元 e に対し，$\varphi(e)$ は M 上の恒等写像 id_M.

M の点 p と $g \in G$ に対し，$\varphi(g)(p)$ は再び M の点である．この $\varphi(g)(p)$ のことを，$\varphi(g)p$ とか，$g \cdot p$ とか，あるいは gp と書くこともある．

47. 2 元のみからなる群 $G = \{e, a\}$ に対し，$\varphi(e)$ を $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上の恒等写像とし，$\varphi(a)\colon S^n \to S^n$ を $\varphi(a)(p) = -p$ によって定義する．φ が G の S^n への作用であることを確かめよ．

群の作用 φ があるとき，M に自然に同値関係を導入することができる．二点 p, $q \in M$ について，$p \sim q$ とは $q = \varphi(g)(p)$ をみたすような $g \in G$ が存在することだと定めるのである．商空間 $M/\sim$ のことを M/G とも書く．たとえば，前問の群 $G = \{e, a\}$ の S^n への作用について，商空間 S^n/G とは射影空間 $\mathbb{P}^n$ にほかならない．

48. 加法群 $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用を，$x \in \mathbb{R}^n$ と $m \in \mathbb{Z}^n$ に対し $\varphi(m)(x) = x + m$ として定める．

(1) φ が $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用になっていることを確かめよ．

(2) 商空間 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ が n 次元トーラス $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{ 個}}$ に同相であることを示せ．

一般に商空間 M/G は多様体になるとは限らないが，上記の例のように多様体になることもある．とくに，G が多様体 M に自由かつ固有不連続に作用しているときは，M/G は自然に多様体の構造をもつことが知られている†．ここで G の M への作用 φ が**自由**（free ないし fixed-point-free）であるとは，単位元以外の任意の $g \in G$ に対し，$\varphi(g)(p) = p$ をみたす $p \in M$ が存在しないことをいう．また φ が**固有不連続**ないし**真性不連続**（properly discontinuous）であるとは，M の任意のコンパクト集合 K に対し，$\{g \in G \mid K \cap \varphi(g)(K) \neq \varnothing\}$ が有限集合であることをいう．

49. $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用を，$x \in \mathbb{R}^n$ と $m \in \mathbb{Z}^n$ に対し $\varphi(m)(x) = x + m$ として定める．この群の作用 φ が自由かつ固有不連続であることを確かめよ．

50. p と q を互いに素な二つの自然数とする．$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ の 3 次元球面 $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ への作用を，$\varphi(\overline{k})(z_1, z_2) = (e^{2\pi i k/p} z_1, e^{2\pi i k q/p} z_2)$ とすることによって定義する．この群の作用 φ が自由かつ固有不連続であることを確かめよ．（この群の作用により得られる商多様体 $S^3/\mathbb{Z}_p$ を**レンズ空間**という．）

---

*条件 (i)，(ii) によって各 $\varphi(g)$ は M 上の C^∞ 級自己微分同相写像になる（逆写像は $\varphi(g^{-1})$ である）．このことに注意すると，G の M への作用とは，G から M 上の C^∞ 級自己微分同相写像のなす群 $\mathrm{Diff}(M)$ への準同型のことだともいえる．

†詳しくいうと，まず M/G は Hausdorff であり，さらに自然な射影 $\pi\colon M \to M/G$ が被覆写像になるので，M のもつ多様体の構造を M/G は自然に受け継ぐのである．なお，「properly discontinuous」という語句の用法は一定しておらず，そのため使用を避ける動きもある．J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Springer, 2013 の第 21 章をみよ．

§14　写像の正則点・臨界点と部分多様体

51.　$\mathbb{R}^3$ で定義された関数 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ について，f の臨界点および臨界値をすべて求めよ．また各 $c\in\mathbb{R}$ に対し，$f^{-1}(c)$ は $\mathbb{R}^3$ のどのような部分集合か，図を描いて説明せよ．

52.　a を実数の定数とする．$\mathbb{R}^3$ で定義された関数 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+axyz$ の臨界点および臨界値をすべて求めよ．

53.　2 次元トーラス $T^2=S^1\times S^1=\{(x_1,y_1,x_2,y_2)\in\mathbb{R}^4\mid x_1^2+y_1^2=1,\ x_2^2+y_2^2=1\}$ において，関数 $f\colon T^2\to\mathbb{R}$ を $f(x_1,y_1,x_2,y_2)=(1+x_1)(1+x_2)$ によって定義する．f の臨界点および臨界値をすべて求めよ．

54.　2 次元球面 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$ において，写像 $f\colon S^2\to\mathbb{R}^2$ を $f(x,y,z)=(x,y)$ によって定義する．f の臨界点および臨界値をすべて求めよ．

応用として，いくつかの古典群を扱う．はじめに $GL(n,\mathbb{R})$ について説明する．これは n 次実正則行列全部の集合のことで，n 次実正方行列全部のなす集合 $M(n,\mathbb{R})$ の部分集合である．$M(n,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視する（成分を並べる順番はどのようにしてもよい．何かひとつ決める）ことにより C^∞ 級多様体である．すると，$GL(n,\mathbb{R})$ は連続関数 $\det\colon M(n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ による $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ の逆像だから，これは $M(n,\mathbb{R})$ の開部分集合であって，したがって $GL(n,\mathbb{R})$ も n^2 次元 C^∞ 級多様体になっていることがわかる．さらに，$GL(n,\mathbb{R})$ は同時に群でもあり（**一般線型群**という），しかも積や逆元をとる操作 $(g,h)\mapsto gh$，$g\mapsto g^{-1}$ はどちらも C^∞ 級写像になっている．こういうものは一般に **Lie 群**とよばれる．n 次複素正則行列全体の集合 $GL(n,\mathbb{C})$ も，同様にして $2n^2$ 次元の Lie 群になっている．

55. (1)　$GL(n,\mathbb{R})$ は連結でなく，$GL_+(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R})\mid \det A>0\}$ がその連結成分のひとつであることを示せ．［ヒント：$GL_+(n,\mathbb{R})$ の連結性については，行列の基本変形.］
(2)　$GL(n,\mathbb{C})$ が連結であることを示せ．

$GL(n,\mathbb{R})$ や $GL(n,\mathbb{C})$ の重要な部分群として，**直交群** $O(n)=\{A\in M(n,\mathbb{R})\mid {}^tAA=E\}$ と**ユニタリ群** $U(n)=\{A\in M(n,\mathbb{C})\mid A^*A=E\}$ があげられる．写像の正則値について学んだことを応用すると，これらは C^∞ 級部分多様体でもあって，したがってやはり Lie 群であることが証明できる*.

56.　$O(n)$ が $GL(n,\mathbb{R})$ の $n(n-1)/2$ 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ．［ヒント：写像 $A\mapsto {}^tAA$ に着目する．これは実対称行列全部の集合 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ を終域とする写像とみなせることに注意する．定義域は $GL(n,\mathbb{R})$ と思ってもよいし，$M(n,\mathbb{R})$ と思っても差し支えない.］

57.　$U(n)$ が $GL(n,\mathbb{C})$ の n^2 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

58.　$U(n)$ が連結であることを示せ．［ヒント：連続な全射 $GL(n,\mathbb{C})\to U(n)$ を構成すればいい．Gram–Schmidt の直交化法.］

*一般に Lie 群の閉部分群は自動的に C^∞ 級部分多様体となり，そうしてふたたび Lie 群となることが知られているが，これは深い結果である．小林俊行，大島利雄『リー群と表現論』（岩波書店）を参照せよ．

§15　1 の分割

59.　$m > n$ とし，M を σ コンパクトな m 次元 C^∞ 級多様体，N をその n 次元 C^∞ 級部分多様体として，さらに N は M の閉部分集合であるとする．N 上で定義された任意の C^∞ 級関数 f に対し，M 上の C^∞ 級関数 $\tilde{f}$ であって $\tilde{f}|_N = f$ をみたすものが存在することを証明せよ．

60.　M を σ コンパクトな C^∞ 級多様体とする．

(1)　M の任意の開被覆が可算部分被覆をもつことを示せ．

(2)　f を M 上で定義された有界な連続関数とする．そのとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，M 上の C^∞ 級関数 g であって

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (\text{任意の } x \in M \text{ について})$$

をみたすようなものが存在することを証明せよ．［ヒント：$M = B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$ かつ $\operatorname{supp} f$ がコンパクトであれば，Friedrichs の軟化子を用いて構成できる．一般の M の場合は，1 の分割を用いて局所的な問題におきかえる．細部まで正確に議論できればかなりのもの．］