9. 偏微分

● 偏微分とは

まず復習から．$D \subset \mathbb{R}^n$，$f : D \to \mathbb{R}$ とし，a を D の内点とする．そのとき

f が a において全微分可能

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} A_i (x_i - a_i) + o(|x - a|) \quad (x \to a)$$

をみたす $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ が存在．

注　ここで $x = (x_1, \dots, x_n)$，$a = (a_1, \dots, a_n)$ とした．以下いちいち断らずにこのように書くことにする．

一方，偏微分とは次のようなもの．

定義　$D \subset \mathbb{R}^n$，$f: D \to \mathbb{R}$ とし，

a を D の内点とする．

f が a で偏微分可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{x_i - a_i}$$

が存在する．

このとき，上記の極限を f の a における

x_i に関する偏微分係数といい

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \text{や} \quad f_{x_i}(a)$$

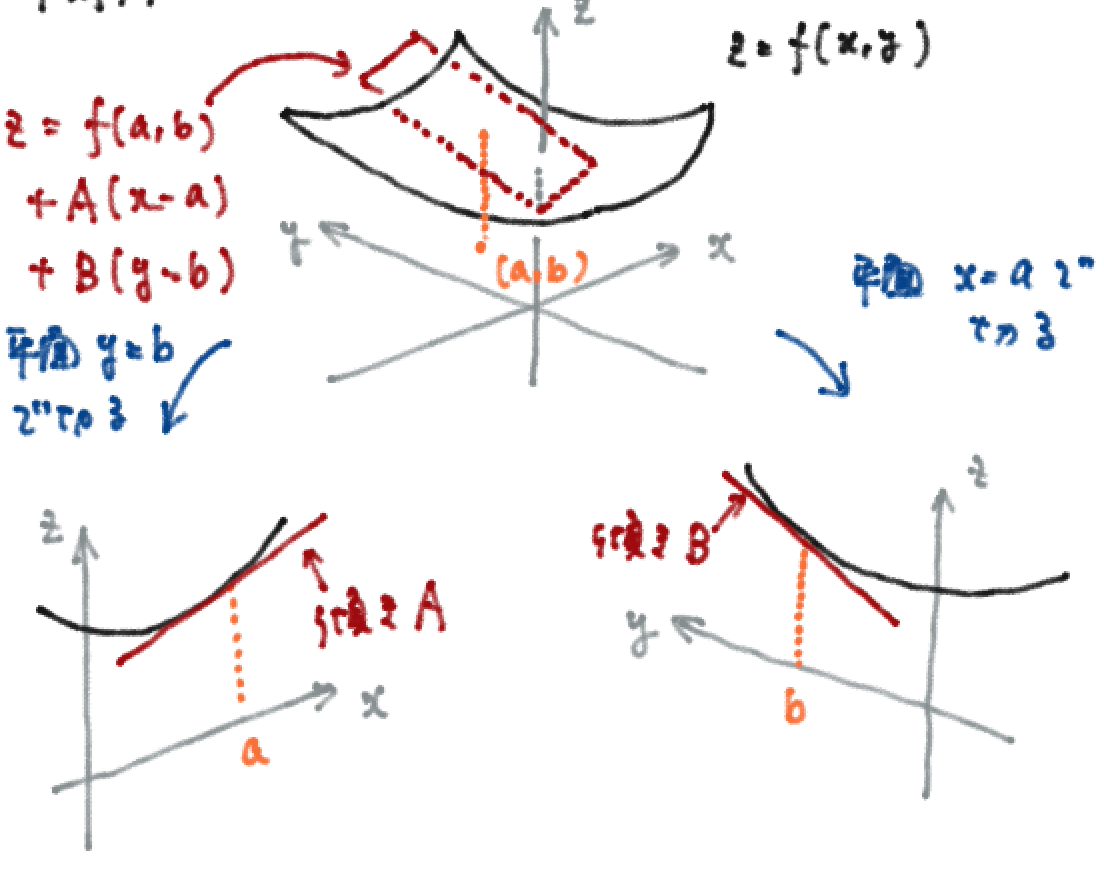
などと表す．

なぜ偏微分を考える？

2変数の全微分可能な関数 f について、

$$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$$

に現れる A, B が偏微分係数と関係している。



この考察は

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

を示唆している。

<u>命題 9.1</u>　$D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}$ は D の内点で，f は $\boldsymbol{a}$ で全微分可能とする．そのとき，

(1)　f は $\boldsymbol{a}$ で偏微分可能で，

(2)　全微分の定義式中の係数 A_i は $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ と一致する．したがってまた

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right).$$

［証明］　2 変数関数の場合を考える．

$$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + A_1(x_1 - a_1) + A_2(x_2 - a_2) + R(x_1, x_2),$$

$$R(x_1, x_2) = o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|) \quad (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}).$$

このとき

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2) \\
&= \big(f(a_1, a_2) + A_1(x_1 - a_1) \\
&\qquad + R(x_1, a_2) \big) - f(a_1, a_2) \\
&= A_1(x_1 - a_1) + R(x_1, a_2).
\end{aligned}
$$

ここで

$$x \to a \text{ のとき } \frac{R(x_1, x_2)}{|x - a|} \to 0$$

だから，とくに

$$x_1 \to a_1 \text{ のとき } (x_1, a_2) \to (a_1, a_2)$$

なので

$$\frac{R(x_1, a_2)}{|(x_1, a_2) - (a_1, a_2)|} \to 0.$$

$$\parallel$$

$$\frac{R(x_1, a_2)}{|x_1 - a_1|}$$

$$\therefore\quad \frac{f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{x_1 - a_1}$$

$$= A_1 + \frac{R(x_1, a_2)}{x_1 - a_1} \longrightarrow A_1$$

$$(x_1 \longrightarrow a_1).$$

すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = A_1.$$

A_2 についても同様．また 3 変数以上の場合についても同様． $\square$

D を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．すべての点 $a \in D$ において f が偏微分可能であるとき，

$$a \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

という関数を f の x_i に関する**偏導関数**といい，入力 a をあらためて x と書いて

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \qquad f_{x_i}(x)$$

とか，単に

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad f_{x_i}$$

と書く．

531 $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$.

$D = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$ において考える.

① $f(x,b) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{b}{x}$.

これを $g_1(x)$ とおくと

$$g_1'(x) = -\frac{b}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{b}{x}\right)^2}$$

$$= -\frac{b}{x^2+b^2}.$$

$$\therefore\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -\frac{b}{a^2+b^2}.$$

② $f(a,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{a}$.

これを $g_2(y)$ とおくと

$$g_2'(y) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{a}{a^2+y^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

以上より D の各点で偏微分可能.

偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

注　慣れてきたら次のようにしてもいい….

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$= -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

◎ 全微分可能性の判定

<u>定義</u>　D　$\mathbb{R}^n$ の開集合,

$f : D \to \mathbb{R}$.

このとき, f が D 上で C^1級 で

あるとは

(0)　f は連続,

(1)　f は D の各点で偏微分可能,

かつ すべての偏導関数が連続

であることをいう.

<u>定理 9.2</u>　f が D 上 C^1級

$\Longrightarrow$ f は D の各点で全微分可能.

<u>5か1</u> $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$.

$D = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

とくに f は D で C^1 級なので，f は D の各点で全微分可能（定理 9.2 による）．さらに，点 $(a,b) \in D$ における勾配ベクトルは，命題 9.1 により

$$\nabla f(a,b) = \left(-\frac{b}{a^2+b^2}, \frac{a}{a^2+b^2}\right).$$

［定理 9.2 の証明］ 2変数のときだけを考える．$(a, b) \in D$ の近くにある点 (x, y) に対し，まず

$$f(x, y) - f(a, y) = f_x(c_1, y) \cdot (x - a)$$

となる c_1 を a と x の間にとれる．

さらに

$$f(a, y) - f(a, b) = f_y(a, c_2) \cdot (y - b)$$

となる c_2 を b と y の間にとれる．

以上より

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(c_1, y) \cdot (x - a) + f_y(a, c_2) \cdot (y - b).$$

右辺を

$$f(a,b)+f_x(a,b)\cdot(x-a)$$
$$+f_y(a,b)\cdot(y-b)$$
$$+R(x,y)$$

と書く．示すべきことは

$$R(x,y)=o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$$
$$((x,y)\longrightarrow(a,b))$$

である．

$$R(x,y)=\underbrace{\left(f_x(c_1,y)-f_x(a,b)\right)}_{①}\cdot(x-a)$$
$$+\underbrace{\left(f_y(a,c_2)-f_y(a,b)\right)}_{②}\cdot(y-b)$$

なので

$$\frac{|R(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

$$\leqq |①| \cdot \frac{|x-a|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

$$+ |②| \cdot \frac{|y-b|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

$$\leqq |①| + |②| .$$

ここで $(x,y) \to (a,b)$ とする．そのとき (c_1, y) も (a, c_2) も (a,b) に近づく．f_x, f_y の連続性により ① も ② も 0 に近づく．ゆえに

$$R(x,y) = o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$$

$$((x,y) \to (a,b)). \quad \square$$

注 「C^1級」を仮定しないとだめなのか?

(1) 「偏導関数をもつ」では不十分?

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

これは $\mathbb{R}^2$ で偏導関数をもつ。
しかし f は $(0,0)$ で全微分可能ではない(連続ですらない)。

(2) 「連続で、偏導関数をもつ」では不十分?

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

この f が示すように、不十分。

◎ 高階偏導関数

Dを$\mathbb{R}^n$の開集合，$f: D \to \mathbb{R}$とする．fがDの各点で偏微分可能なら

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\text{または } f_{x_i})$$

が定義される．

さらにこれもDの各点で偏微分可能なら

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad (\text{または } (f_{x_i})_{x_j})$$

が定義される．これらを**2階偏導関数**という．(*)のかわりに通常

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (\text{または } f_{x_i x_j})$$

と書く。

k階偏導関数についても同様。

定義 次が成り立つとき，$f : D \to \mathbb{R}$ は **C^k 級**であるという。

(0) f は連続。

(1) f は (1階) 偏導関数をもち，それらも連続。

(2) f は 2階 〃 をもち，それらも 〃 。

⋮

(k) f は k階 〃 をもち，それらも 〃 。

<u>定理 9.3</u>　C^k 級関数に対して，その k 階までの偏導関数は偏微分の順序によらない．

たとえば C^2 級なら

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}.$$

C^3 級なら

$$f_{x_i x_j x_k} = f_{x_i x_k x_j} = f_{x_j x_i x_k}$$
$$= f_{x_j x_k x_i} = f_{x_k x_i x_j}$$
$$= f_{x_k x_j x_i}.$$