☆ 前回の訂正

最後の

(*) $$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Tan}^{-1} 1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

について。

前回の説明では

$$\mathrm{Tan}^{-1} x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^{2m+1}$$

を $x \in (-1,1)$ に対して成り立つ式として説明した。しかし、証明を見直してみれば $x = \pm 1$ のときもこの式が成り立つことはわかる。ゆえに (*) は正しい。

8. 多変数関数の全微分

今回から多変数関数（おもに2変数・3変数）の微分を扱う.

● $\mathbb{R}^n$についての基本事項

n変数関数とは **n次元ユークリッド空間**

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

の部分集合において定義された関数のこと.

$\mathbb{R}^n$の元のことを**点**といったり**ベクトル**といったりする. ただしベクトルというときは次のような演算が定義された対象とみなしている：

$x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$

に対して

$x+y=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$, <u>和</u>

$x-y=(x_1-y_1,\ldots,x_n-y_n)$, <u>差</u>

$cx=(cx_1,\ldots,cx_n)$. <u>スカラー倍</u>

<u>定義</u> (1) ベクトル $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

に対し

$$|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

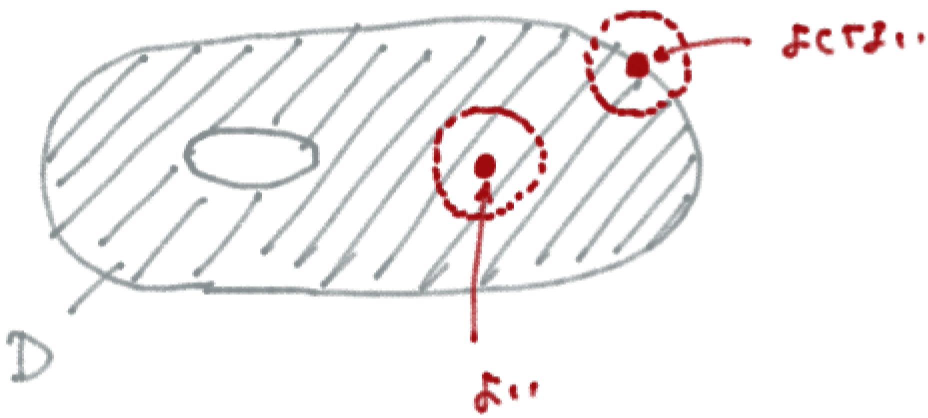
と定め，これを x の <u>長さ</u> という．

(2) 2点 $x,y\in\mathbb{R}^n$ に対し，

$|x-y|$ のことを x と y の <u>距離</u> と

いう．

$D \subset \mathbb{R}^n$とする．n変数関数
$f: D \to \mathbb{R}$ の $a \in D$ における"微分"
を考える際は，aの"まわり"がDに
含まれていることが望ましい．



"まわり"を正確に述べるには

$$B(a, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < r \}$$

を使うのがいい．これを中心a，半径r
の<u>開球</u>という（$n=2$のときは<u>開円板</u>
ともいう）．

定義　部分集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたとする.

(1) $a \in D$ に対して

$$B(a, r) \subset D$$

となるような $r > 0$ が存在するとき, a は D の 内点 であるという.

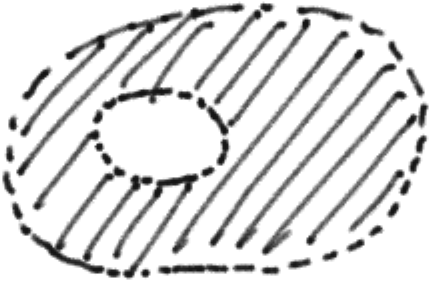
(2) D が $\mathbb{R}^n$ の 開集合

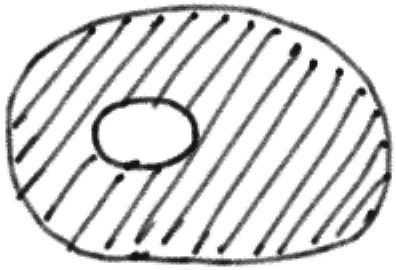
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ D の点がすべて D の内点.

(3) D が $\mathbb{R}^n$ の 閉集合

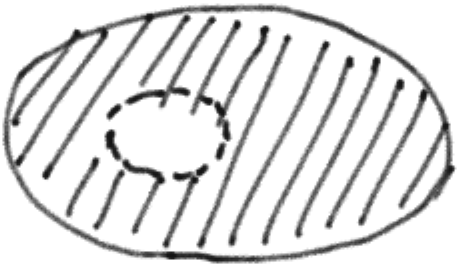
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ D の補集合 $\mathbb{R}^n - D$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合.

例　$\mathbb{R}^2$の開集合の例　　　閉集合の例





開集合でも閉集合でもない例



例　$\mathbb{R}$において

(a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$　開集合

$[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$　閉集合

$[a, b)$, $(a, b]$　どちらでもない

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$　開集合かつ閉集合

多変数の1次関数

<u>定義</u>　n 変数 $x_1, \ldots, x_n$ の **1次関数** とは

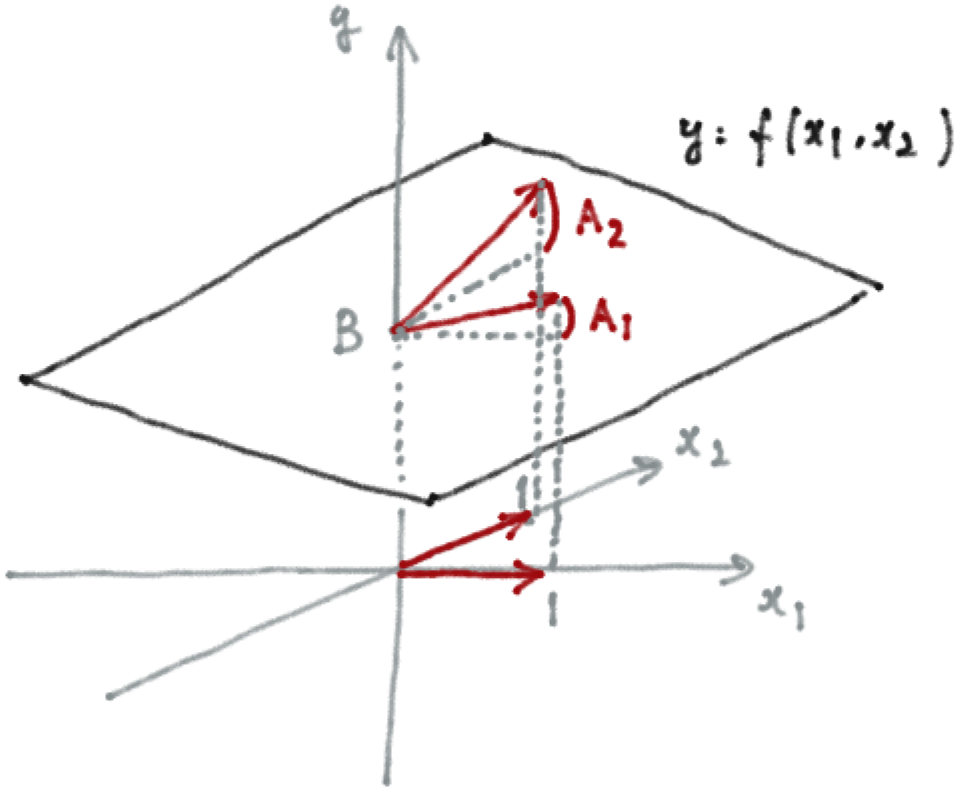
$$(*) \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i + B$$

という形の関数のこと．ここで

$A_1, \ldots, A_n, B \in \mathbb{R}$.

<u>例</u>　2変数のとき

$$f(x_1, x_2) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + B$$



A_1 とは x_1 軸方向に 1 進んだときの増大量，
A_2 〃 x_2 〃 〃 〃 .

<u>定義</u> ベクトル $A = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n$
のことを 1次関数 (＊) の
<u>勾配ベクトル</u> という.
(gradient vector)

命題 8.1　$n=2$ または 3 とする。

(1)　勾配ベクトル $\mathbb{A}$ の向きは，

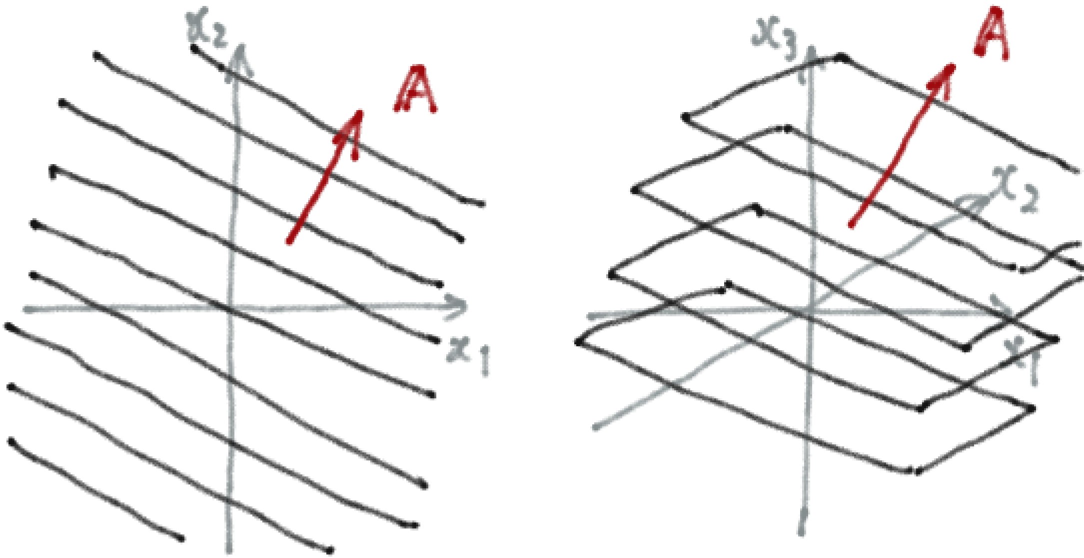
1次関数 (*) の値が最も速く増大する向きである。すなわち，

$\forall \mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$f(\mathbb{a}+\mathbb{u})-f(\mathbb{a}) \quad (\mathbb{u}\text{ は単位ベクトル})$$

が最大となるのは $\mathbb{u}$ と $\mathbb{A}$ が同じ向きのとき。

(2)　勾配ベクトル $\mathbb{A}$ は，1次関数 (*) の等高線（等高面）に直交する。



[証明] $n=2$ のときについて行う.

(1) 1次関数の式を

$$f(x_1, x_2) = (A_1, A_2)\cdot(x_1, x_2) + B$$

すなわち

$$f(x) = A \cdot x + B$$

と書きかえる. すると

$$f(a+u) - f(a) = A \cdot u$$
$$= |A|\,|u| \cos\theta$$

(θ は A と u のなす角)

$$= |A| \cos\theta .$$

$(\because\ u$ は単位ベクトル$)$

これが最大となるのは $\theta = 0$ のとき.

(2) u が等高線に沿ったベクトルだとすると

$$f(a+u) - f(a) = 0$$

a と $a+u$ は同じ等高線上

なので $A \cdot u = 0$. すなわち A と u は直交する. $\square$

多変数関数の全微分

<u>定義</u> $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$.

a は D の内点と仮定する.

もし

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} A_i (x_i - a_i)$$

$$+ o(|x - a|)$$

$$(x \to a)$$

をみたす $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ が存在するとき, f は a において<u>全微分可能</u>であるという. また

ナブラとよむ $\to$ $\nabla f(a) = (A_1, \dots, A_n)$

を f の a における<u>勾配ベクトル</u>とよぶ.

注　$R(x) = o(|x-a|) \ (x \to a)$

とは $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{|x-a|} = 0$ のこと．

定義　f が a において全微分可能で

勾配ベクトルが $A = (A_1, \dots, A_n)$ の

とき，

$$\varphi(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} A_i x_i$$

という1次関数のグラフのことを

f のグラフの a における 接超平面

という（$n=2$ のときは 接平面 という）．

例　$f(x,y)=x^2+y^2$．点 $\mathbf{a}=(1,2)$ における全微分可能性．

$\mathbf{x}=(x,y)$ とおき，$\mathbf{x}-\mathbf{a}=\mathbf{h}=(h_1,h_2)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= f(1+h_1,\ 2+h_2)\\
&= (1+h_1)^2+(2+h_2)^2\\
&= \underbrace{5}_{=f(\mathbf{a})}+2h_1+4h_2+h_1^2+h_2^2.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\frac{h_1^2+h_2^2}{|\mathbf{h}|}=\sqrt{h_1^2+h_2^2}\to 0 \quad (\mathbf{h}\to\mathbf{0})
$$

$$
\therefore\quad h_1^2+h_2^2=o(|\mathbf{h}|)\quad(\mathbf{h}\to\mathbf{0}).
$$

ゆえに

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + 2h_1 + 4h_2 + o(|\boldsymbol{h}|)$$
$$(\boldsymbol{h} \to 0).$$

つまり f は $\boldsymbol{a} = (1, 2)$ で全微分可能。勾配ベクトルは $(2, 4)$。また接平面の式は

$$z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2).$$

例 $f(x, y, z) = xyz$. $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$.

$\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ とおき、$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$ と書く。

$$f(\boldsymbol{x}) = f(1+h_1, 2+h_2, 3+h_3)$$
$$= (1+h_1)(2+h_2)(3+h_3)$$

$$= \underbrace{6}_{\substack{\parallel \\ f(a)}} + 6h_1 + 3h_2 + 2h_3 + 3h_1h_2 + 2h_1h_3 + h_2h_3 + h_1h_2h_3.$$

ここで $h \to 0$ のとき,

$$\frac{|h_1h_2|}{|h|} \leqq \frac{|h|^2}{|h|} \longrightarrow 0$$

$$(\because |h_1| \leqq |h|,\ |h_2| \leqq |h|)$$

$$\therefore\ h_1h_2 = o(|h|).$$

同様に $h_1h_3 = o(|h|)$, $h_2h_3 = o(|h|)$.

また

$$\frac{|h_1h_2h_3|}{|h|} \leqq \frac{|h|^3}{|h|} \longrightarrow 0.$$

$$\therefore\ h_1h_2h_3 = o(|h|).$$

ゆえに

$$f(x) = f(a) + 6h_1 + 3h_2 + 2h_3 + o(|h|) \quad (h \to 0).$$

つまり f は a で全微分可能．

勾配ベクトルは $(6, 3, 2)$．接超平面の式は

$$w = 6 + 6(x-1) + 3(y-2) + 2(z-3).$$