7. テイラーの定理（2）

◎ テイラーの定理の詳しい主張と証明

<u>定義</u>　開区間 I で定義された関数 f が

(i) n 回微分可能

(ii) n 階導関数 $f^{(n)}$ が連続

という2条件をみたすとき，f は

C^n 級であるという．

　また，無限回微分可能であることを

C^∞ 級であるという．

定理6.1を詳しく述べると次のようになる.

<u>定理7.1</u>　f は $a \in \mathbb{R}$ を含む開区間 I で定義された関数とする.

(1)（漸近展開）f が I で C^n 級ならば

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \quad (x \to a).$$

(2)（剰余項の表示）f が I で n 回微分可能ならば, $\forall x \in I$ に対し, a と x の間の数 c であって

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

をみたすようなものが存在する．

[証明]（2） コーシーの平均値の定理（定理5.4）を繰り返して用いる．
便宜上，（2）の主張に現れる x を証明中では b と書く．以下，$b>a$ として証明を書くが，$b<a$ でも同様である．

$$F(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

$$G(x) = (x-a)^n$$

とおく．示すべきことは

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$ をみたす

$c \in (a, b)$ が存在する

ということである．ここで，$F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ が成り立つことに注意する．

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)}$$

$$= \frac{F'(b_1)}{G'(b_1)} \quad \left(\exists\, b_1 \in (a, b)\right)$$

∵ コーシーの平均値の定理

$$= \frac{F'(b_1) - F'(a)}{G'(b_1) - G'(a)}$$

$$= \frac{F''(b_2)}{G''(b_2)} \quad \left(\exists\, b_2 \in (a, b_1)\right)$$

$$= \frac{F''(b_2) - F''(a)}{G''(b_2) - G''(a)} = \cdots$$

$$= \frac{F^{(n-1)}(b_{n-1}) - F^{(n-1)}(a)}{G^{(n-1)}(b_{n-1}) - G^{(n-1)}(a)}$$

$$= \frac{F^{(n)}(b_n)}{G^{(n)}(b_n)} \quad \left(\exists\, b_n \in (a, b_{n-1}) \right)$$

$$= \frac{f^{(n)}(b_n)}{n!}.$$

$c = b_n$ とおけば，これが示すべき式である．

(1) f が I で C^n 級とする．示すべきことは

$$R(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

とおくと $R(x) = o\left((x-a)^n\right)$ $(x \to a)$ で

あること，すなわち

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$$

であること．

f は n 回微分可能なので，(2) より

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x-a)^n$$

をみたす $c(x)$ が a と x の間に存在する．したがって

$$R(x) = \frac{f^{(n)}(c(x)) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$$\therefore \quad \frac{R(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(c(x)) - f^{(n)}(a)}{n!}.$$

ここで $x \to a$ のとき $c(x) \to a$.

さらに仮定より $f^{(n)}$ は連続なので,

上の式の右辺は 0 に近づく.

すなわち

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$$

が成り立つ. $\square$

● n次テイラー多項式の求め方に関する注意

$$(*)\quad p_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

を f の $x=a$ における n次近似式とか n次テイラー多項式とかいった.

① $p_n(x)$ は定理7.1の(1)の式

$$(**)\quad f(x) = p_n(x) + o((x-a)^n) \quad (x \to a)$$

をみたす. これを逆手にとって $p_n(x)$ の係数を決定できることがある.

② (*) の $p_n(x)$ は (**) を

みたす唯一の n次多項式である.

(∵ 他にそのような n次多項式

$\tilde{p}_n(x)$ があったとすると,

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x) = o((x-a)^n)$$

となり, 矛盾.)

ここで (**) をみたす $p_n(x)$ を

見つければ, それは必然的に

(*) の $p_n(x)$ と一致している.

例　$f(x) = xe^x$.　$x \to 0$ のとき

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\therefore\ xe^x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n!} + o(x^{n+1}).$$

上記の 2 により，〰〰 部が xe^x の $x=0$ における $n+1$ 次テイラー多項式．

例　$f(x) = \tan x$.　$x=0$ における 5 次テイラー多項式

$$p_5(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$$

を求めたい．

まず

$$\tan x = p_5(x) + o(x^5) \quad (x \to 0)$$

だが，x を $-x$ におきかえると

$$-\tan x = p_5(-x) + o(x^5),$$

$$\therefore \tan x = -p_5(-x) + o(x^5).$$

上記②より $-p_5(-x) = p_5(x)$ である．よって $a_0 = a_2 = a_4 = 0$，つまり

$$p_5(x) = a_1 x + a_3 x^2 + a_5 x^5.$$

次に①を用いる．

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

を思い出す．$\sin x = \cos x \tan x$

なので

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)$$

$$\times \left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)\right)$$

$$= a_1 x + \left(a_3 - \frac{a_1}{2}\right) x^3$$

$$+ \left(a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24}\right) x^5 + o(x^5).$$

したがって

$$a_1 = 1, \quad a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6},$$

$$a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24} = \frac{1}{120}.$$

これを解いて

$$a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{2}{15}.$$

● 近似計算への応用

例 $\sin 47^\circ$

① 平均値の定理を用いた
第5講での議論

$$\sin 47^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{90}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} + (\cos c)\cdot\frac{\pi}{90}$$

となる $c \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{90}\right)$ が存在する.

$\frac{1}{2} < \cos c < \frac{1}{\sqrt{2}}$ なので

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{90} < \sin 47^\circ < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{90}.$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{90}}_{=\,0.72456\cdots} \qquad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{90}}_{=\,0.73138\cdots}$$

② 平均値の定理をもっと精確に扱う。

$$\sin 47^\circ = \sin\frac{\pi}{4} + (\cos c)\cdot\frac{\pi}{90}$$

となるので

$$\left|\sin 47^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{\pi}{90}\cdot|\cos c|$$

$$< \frac{\pi}{90}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

③ 定理7.1の(2)の $n=2$ の場合を用いて②と同様に議論する。

$$\sin 47^\circ = \sin\frac{\pi}{4} + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{90}$$

$$-\frac{\sin c}{2!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^2$$

となる $c \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{90}\right)$ がある。

したがって

$$\left| \sin 47^\circ - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{90} \right) \right|$$

$$= \frac{|\sin c|}{2!} \cdot \left(\frac{\pi}{90} \right)^2$$

$$< \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\pi}{90} \right)^2 .$$

これで誤差は $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{90} \right)^2 = 0.000609\cdots$

未満.

◎ テイラー展開

f が $a\in\mathbb{R}$ を含む開区間 I で C^∞ 級とする．$x\in I$ を固定すると

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

と表せる．ここでもし

$$(*)\quad \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n\to 0\quad(n\to\infty)$$

が成り立つならば，$f(x)$ は

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

と表されることになる．

定義 $\forall x \in I$ に対し (*) が成り立つとき、

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

を f の I における a を中心とする**テイラー展開**という。

例 $f(x) = e^x$. $I = (-\infty, \infty)$.
$x \in I$ を固定すると

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n$$

をみたす c が 0 と x の間に存在する。ここで

$$\left|\frac{e^c}{n!}x^n\right| \leq \frac{\max\{1, e^x\}\cdot|x|^n}{n!}$$

$$\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

したがって $\forall x \in (-\infty, \infty)$ に対し

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \quad \left(= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right).$$

とくに

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

例 $\sin x$, $\cos x$ も同様に

$I = (-\infty, \infty)$ において 0 を中心とするテイラー展開をもつ.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$\mathrm{Tan}\, x$ も $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ において

$x=0$ を中心とするテイラー展開をもつ。

具体形を書くのは大変。

<u>例</u> $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1} x,\ I = (-1, 1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$\vdots$$

となって

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & (k\text{が偶数}) \\ (-1)^m (2m)! & (k = 2m+1,\ m = 0, 1, \ldots) \end{cases}$$

よって $\forall x \in (-1, 1)$ に対して

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n \right| \leqq \frac{1}{n} \cdot |x|^n \to 0$$
$$(n \to \infty).$$

だから

$$\mathrm{Tan}^{-1} x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^{2m+1}.$$

とくに

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Tan}^{-1} 1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots.$$

収束は遅い.

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3}$$

$$= 4\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}$$

（マチン，1706年）

などを使うほうがよい．