6. テイラー展開

◎ 復習

第1講 (4/22) 数と極限
2 (4/30) 関数の極限と連続性
3 (5/13) 中間値の定理と逆関数
4 (5/20) 微分と1次近似
5 (5/27) 平均値の定理

<u>定義</u> (微分可能性; 第4講より)

$a \in \mathbb{R}$ のまわりで定義された関数 f に対し, ある $A \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(*) \quad f(a+h) = f(a) + Ah + o(h) \quad (h \to 0)$$

が成り立つとき, A を微分係数といって $f'(a)$ で表す.

注 (*)は

$$f(x)=f(a)+A(x-a)+o(x-a) \quad (x\to a)$$

とも書ける。

<u>定理 5.2</u>（平均値の定理）

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 連続，(a,b)で微分可能

$\Longrightarrow$ $\exists c\in(a,b)$ s.t.

$$(**) \quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

注 (**)は

$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$$

とも書ける。cはaとxの間にある数。

これは$a<x$でも$x<a$でも正しい。

これらの一般化がテイラー展開である。

◎ テイラー展開

（テイラーの定理）

定理 6.1 f は $a \in \mathbb{R}$ を含む開区間 I で定義されている "十分性質のよい" 関数とする（たとえば I において無限回微分可能ならばよい。詳しくは定理 7.1 を参照）.

(1)（バージョン 1 ― 漸近展開バージョン）

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \quad (x \to a).$$

(2)（バージョン 2 ― 剰余項を精密に記述したバージョン）

$\forall x \in I$ に対し，a と x の間の数 c であって

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

となるようなものが存在する．

(1), (2) はいずれも，次の n次近似の精密化である：

$$f(x) \approx f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

右辺を f の $x=a$ における n次近似式とか n次テイラー多項式などという．

n次近似の誤差評価は定理6.1 (2) を使って行う（次回）．

例1　指数関数 $f(x)=e^x$.

$I=(-\infty,\infty)$ で無限回微分可能

だから定理6.1が適用される.

$$f^{(k)}(x)=e^x$$

なので　$x=a$ における n 次近似は

$$e^x \approx f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$=e^a+\sum_{k=1}^{n}\frac{e^a}{k!}(x-a)^k.$$

特に $a=0$ において

$$e^x \approx 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

例2　三角関数　$\sin x$, $\cos x$.

$I=(-\infty,\infty)$ で無限回微分可能だから定理6.1が適用される.

$x=0$ における n 次近似式を求める.

$$
\begin{tikzcd}
\sin x \arrow[r, squiggly, "微分"] & \cos x \arrow[d, squiggly] \\
-\cos x \arrow[u, squiggly] & -\sin x \arrow[l, squiggly]
\end{tikzcd}
$$

なので, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\sin x \approx\ & 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 \\
& + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{-1}{7!}x^7 + \frac{0}{8!}x^8 \\
& + \cdots \\
& + \begin{cases}
\dfrac{1}{n!}x^n & (n\text{を}4\text{で割った余りが}1) \\
\dfrac{-1}{n!}x^n & (n\text{を}\ \ \text{〃}\ \ \text{〃}\ \ \text{〃}\ \ 3) \\
\dfrac{0}{n!}x^n & (n\text{が偶数})
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

（mは $2m+1 \leqq n$ をみたす最大の整数）.

同様に

$$\cos x \approx 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$+ \cdots + \begin{cases} \frac{1}{n!}x^n & (n\text{が}4\text{の倍数}) \\ \frac{-1}{n!}x^n & (n\text{を}4\text{で割った余りが}2) \\ \frac{0}{n!}x^n & (n\text{が奇数}) \end{cases}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

（mは $2m \leqq n$ をみたす最大の整数）.

例3 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. $I = (-1, \infty)$ で無限回微分可能. $x=0$ におけるn次近似式を求める.

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \therefore f'(0) = -1,$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad \therefore f''(0) = 2,$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \quad \therefore f'''(0) = -6,$$

以下同様に $f^{(k)}(0) = (-1)^k k!$ である.

したがって

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{6}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n n!}{n!}x^n$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n.$$

これはたとえば定理6.1 (1)に基づくと

$$(***) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad (x \to 0)$$

を意味する．ところで(***)は別の方法で導くこともできる．等比数列の和の公式から

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x} - \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n\right) \\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)} \\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \\
&= \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} = o(x^n) \quad (x \to 0).
\end{aligned}$$

例4　例3の一般化．$\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，

$x=0$ における n 次近似式は

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^{k}.$$

これは二項定理の一般化になっている．

$\log(1+x)$，$\mathrm{Tan}\, x$ は課題．

漸近展開の極限計算への応用

定理 6.1 (1) の応用.

例 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad (x\to 0)$$

なので

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad (x\to 0).$$

$-o(x^3)$ と書いても間違いではないが,
$f(x) = o(x^3)$ ならば $-f(x)$ も
$o(x^3)$ だから,「$+o(x^3)$」と書いても
よい.

よって

$$\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{6} \quad (x \to 0).$$

<u>例</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x}{x^2}.$

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad \sin x = x + o(x^2)$$

$(x \to 0)$ なので

$$e^x \sin x = \bigl(1 + x + o(x)\bigr)\bigl(x + o(x^2)\bigr)$$

$$= x + x^2 + \boxed{(1+x)\,o(x^2)} = o(x^2)$$

$$+ \underbrace{\boxed{o(x)\cdot x}}_{= o(x^2)} + \underbrace{\boxed{o(x)\cdot o(x^2)}}_{= o(x^3)}$$

$$= x + x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0).$$

よって

$$e^x \sin x - x = x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0).$$

$$\therefore \quad \frac{e^x \sin x - x}{x^2} = 1 + \frac{o(x^2)}{x^2}$$

$$\longrightarrow 1 \quad (x \to 0).$$

もう一歩踏み込んで

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^3}$$

を求めてみる． $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$,

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) \quad (x \to 0)$ より

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12}$$

$$+ \boxed{\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) o(x^3)} = o(x^3)$$

$$+ \underbrace{\boxed{o(x^2) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}}_{= o(x^3)} + \underbrace{\boxed{o(x^2)\, o(x^3)}}_{= o(x^5)}$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

$$\therefore \quad \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{3} \quad (x \to 0).$$