5. 平均値の定理

● ロルの定理と平均値の定理

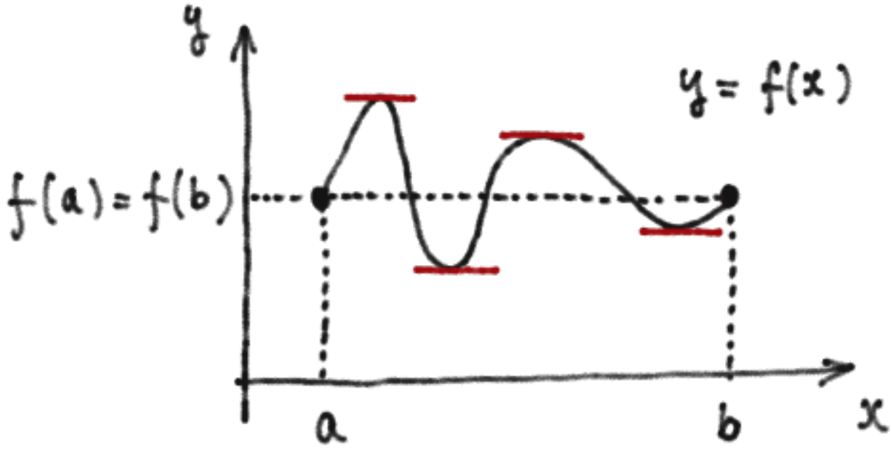
$$\boxed{\text{最大・最小値の存在定理}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{ロルの定理}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{平均値の定理}}$$

<u>定理 5.1</u>（ロルの定理）

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続，(a, b) で微分可能

$f(a) = f(b)$

$\Longrightarrow \ \exists\, c \in (a, b)$ s.t. $f'(c) = 0$.



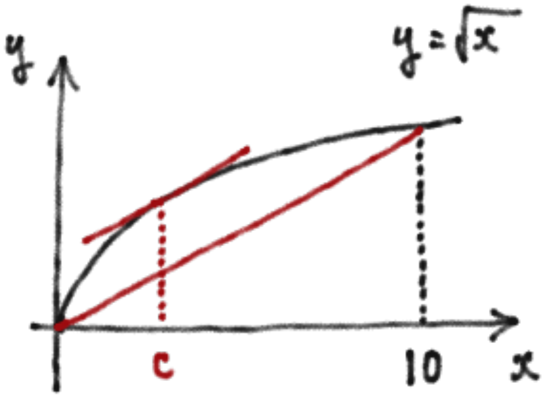
定理 5.2 （平均値の定理）

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続，(a,b) で微分可能

$\Longrightarrow$ $\exists c \in (a,b)$ s.t.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \qquad (5.1)$$

例　$f(x)=\sqrt{x}$.（たとえば）$[0,10]$ で平均値の定理を適用できる．



$$\frac{f(10)-f(0)}{10-0} = f'(c)$$

すなわち

$$\frac{\sqrt{10}}{10} = f'(c)$$

となる $c \in (0,10)$ が存在．

［定理 5.1 $\Rightarrow$ 定理 5.2 の証明］

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (5.2)$$

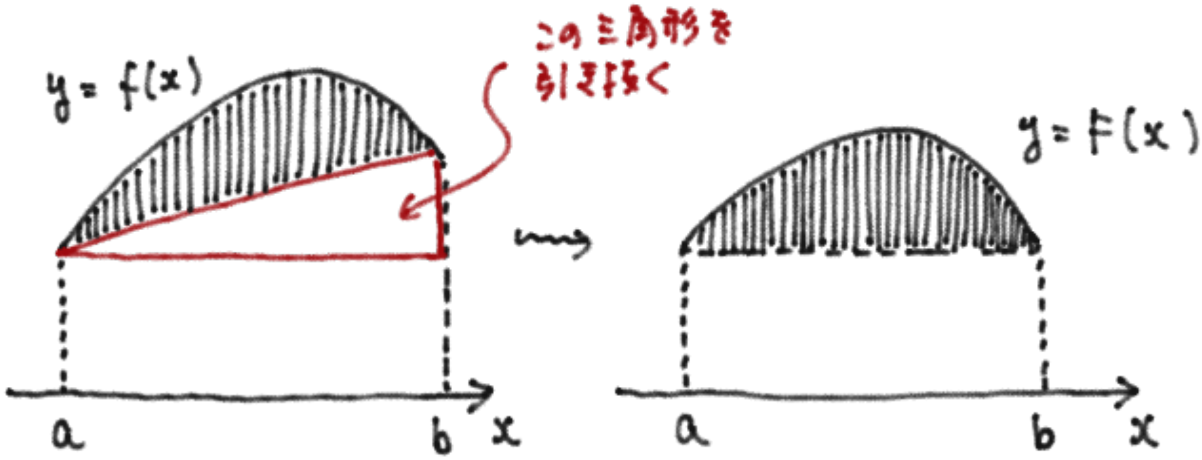
とおくと $F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ は ロルの定理（定理 5.1）の仮定をみたす．したがって

$$F'(c) = 0 \tag{5.3}$$

をみたす $c \in (a, b)$ が存在する。ここで (5.3) は、

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

であることから、(5.1) と同値である。 □



● 平均値の定理の応用

平均値の定理の式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

を書きかえて

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a). \qquad (5.4)$$

注　とくにこの形で「有限増分の定理」とよぶこともある。

f' の符号と f の増減の関係.

定理 5.3　$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 連続, (a,b) で微分可能とする.

(1)　(a,b) で $f'(x)>0 \Rightarrow [a,b]$ で f は真に単調増加.

(2)　(a,b) で $f'(x)<0 \Rightarrow [a,b]$ で f は真に単調減少.

(3)　(a,b) で $f'(x)=0 \Rightarrow [a,b]$ で f は定数.

[証明]　$a\leqq x_1<x_2\leqq b$ に対し

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1)$$

となる $c\in(x_1,x_2)$ があるから. □

式 (5.4) で b を x と書くと

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \tag{5.4'}$$

となる c が a と x の間に存在する．これは $x>a$ でなく $x<a$ であっても正しい（(5.4) で a を x と書き，また b を a と書けばよい）．

1次近似の式

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$

を思い出す．$a+h$ を x と書けば

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a). \tag{5.5}$$

(5.4′) は (5.5) の精密化．

<u>例．</u> $\sin 47^\circ$ の近似計算．(5.4′) より

$$\sin 47^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{90}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + (\cos c)\cdot\frac{\pi}{90}$$

をみたす $c \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{90}\right)$ が存在する．$\frac{1}{2} < \cos c < \frac{1}{\sqrt{2}}$ だから

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0.72456\cdots}}{\sin\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{90}} < \sin 47^\circ < \underset{\substack{\parallel \\ 0.73178\cdots}}{\sin\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{90}}.$$

ロルの定理の証明について

<u>定理3.2</u>（最大・最小値の存在定理，再掲）

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$　連続

$\Rightarrow$　fは$[a, b]$において最大値・最小値をもつ．

［定理3.2 $\Rightarrow$ 定理5.1の証明］

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$は連続，$(a, b)$で微分可能，$f(a) = f(b)$とする．

定理3.2よりfは最大値と最小値をもつ．これらが等しければfは$[a, b]$で定数であり，結論の成立は明らか．そこで最大値と最小値のいずれかが両端での値$f(a)$ $(= f(b))$と異なるとしてよい．以下では最大値が両端での値と異なるとする．

最大値を実現するxの値をひとつとって$x = c$とすれば，$c \in (a, b)$である．そして

$$\lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqq 0, \quad \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqq 0$$

より$f'(c) = \displaystyle\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$でなければならない．□

最大・最小値の存在定理の証明は？

基本的なアイディアは次のとおり：

① 区間 $[a, b]$ における関数の値の"上限"を α とし，

$$f(x_n) \longrightarrow \alpha \quad (n \to \infty)$$

となる $[a, b]$ に属する実数の列 $\{x_n\}$ をとる．

（注： α そのものは関数値として実現されるか わからない．）

② $\{x_n\}$ の収束する部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在する．その極限を c $(\in [a, b])$ とする．

③ $f(c) = \alpha$ であり，これが最大値となる．

①は簡単．③は f の連続性．②はボルツァノ・ワイアシュトラスの定理で，証明の鍵は

事実 3.3（実数の連続性）

である．

● コーシーの平均値の定理

平均値の定理（定理5.2）のひとつの一般化．

<u>定理 5.4</u>（コーシーの平均値の定理）

f, g はともに $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする．さらに $g(a) \neq g(b)$ かつ (a, b) で $g'(x) \neq 0$ とする．そのとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (5.6)$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する．

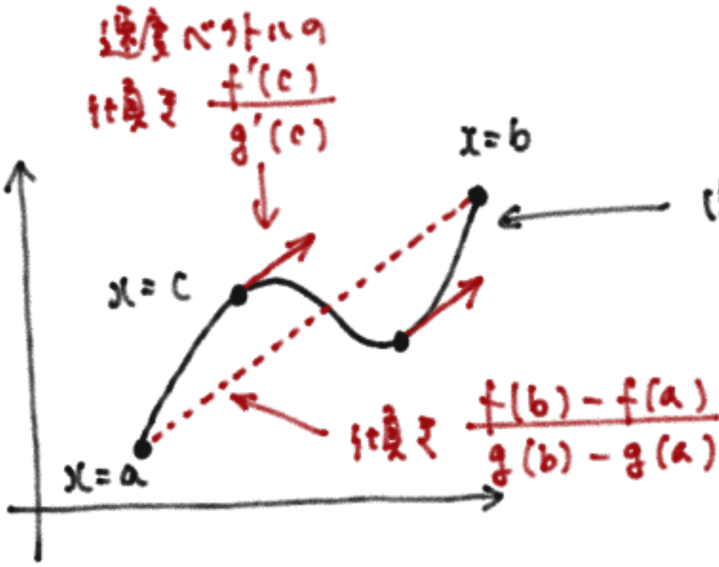
［証明］

$$F(x) = \big(g(b)-g(a)\big) f(x) - \big(f(b)-f(a)\big) g(x)$$

とおけば

$$F(a) = F(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

より F はロルの定理の仮定をみたす．よって $F'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する．
$F'(c) = 0$ を書き換えて (5.6) を得る． □



曲線 $(g(x), f(x))$

$(a \leqq x \leqq b)$

いわゆるロピタルの定理はコーシーの平均値の定理から得られる。ロピタルの定理を覚えようとせずに、コーシーの平均値の定理を直接用いればよいと思う。

例　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ は？

まず $\displaystyle\lim_{x \to +0}$ を求める。$f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x^3$ とおく。

任意に固定した $x_0 > 0$ に対して

$$\frac{x_0 - \sin x_0}{x_0^3} = \frac{1 - \cos x_1}{3x_1^2}$$

となる $x_1 \in (0, x_0)$ が存在する。さらに

$$\frac{1 - \cos x_1}{3x_1^2} = \frac{\sin x_2}{6x_2}$$

となる $x_2 \in (0, x_1)$ が存在する。ここで

$$\lim_{x_2 \to +0} \frac{\sin x_2}{x_2} = 1$$

なので

$$\lim_{x \to +0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x_0 \to +0} \frac{x_0 - \sin x_0}{x_0^3}$$

$$= \lim_{x_2 \to +0} \frac{\sin x_2}{6 x_2} = \frac{1}{6}.$$

$\lim_{x \to -0}$ についても同様。よって

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$