4. 微分と1次近似

◎ (一変数の) 微分の再解釈

$a \in \mathbb{R}$ のまわりで定義された関数 f に対し

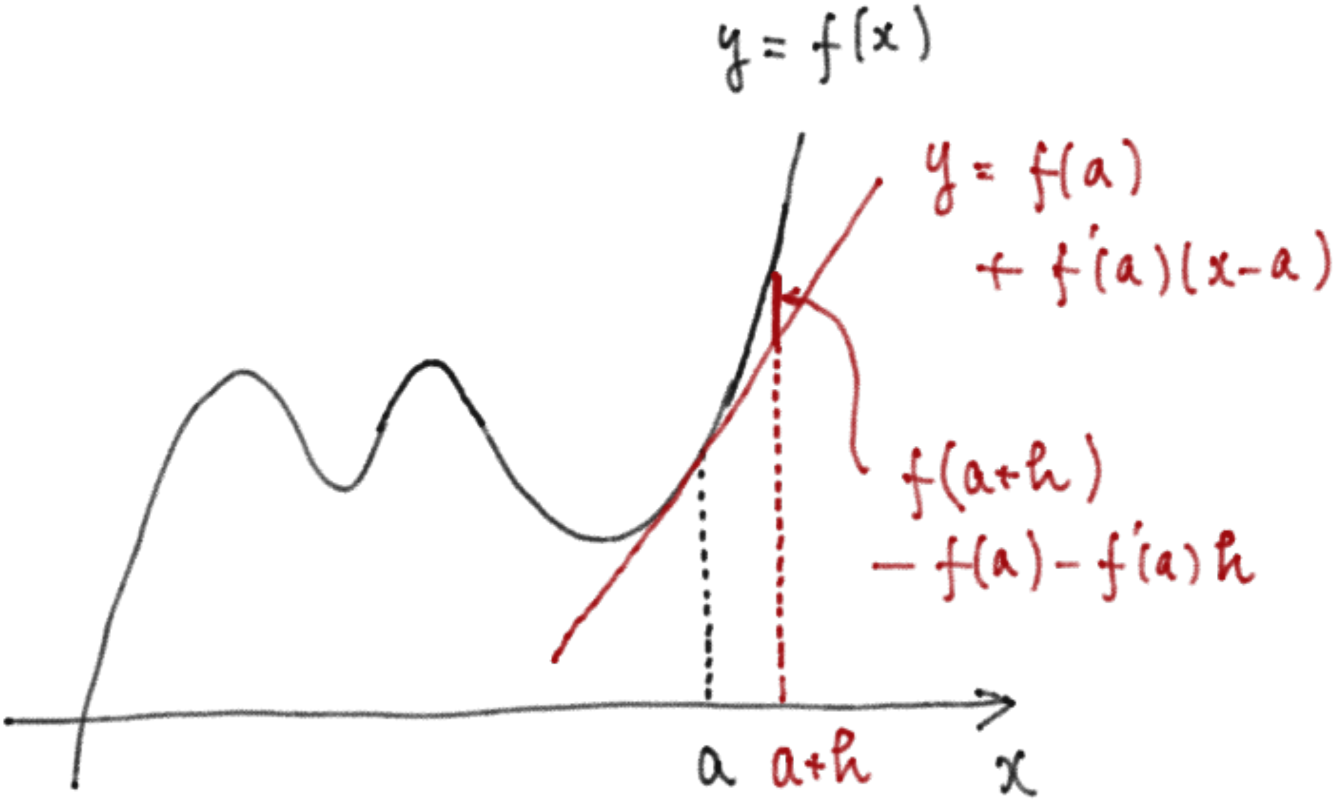
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

または同じことだが

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

これを書きかえて

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0.$$



すなわち、 $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R(h)$ により $R(h)$ を定義すれば

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0.$$

これを微分係数の定義とすることができる。

つまり

定義 $a \in \mathbb{R}$ のまわりで定義された関数 f に対し，ある $A \in \mathbb{R}$ が存在して

$$f(a+h) = f(a) + Ah + R(h), \qquad (4.1)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0 \qquad (4.2)$$

となるとき，A のことを微分係数といって $f'(a)$ で表す．

(4.1), (4.2) の気持ち：

"$f(a+h)$ は 1次関数 $f(a)+Ah$ でよく近似される．
誤差 $R(h)$ は h よりも速く 0 に近づく"

そういう A の存在が「微分できる」ということ．
微分可能性とは「1次近似可能性」である．

例　$f(x)=x^2$ に対し $f'(3)=6$. すなわち

$$f(3+h) = 9+6h+R(h),$$

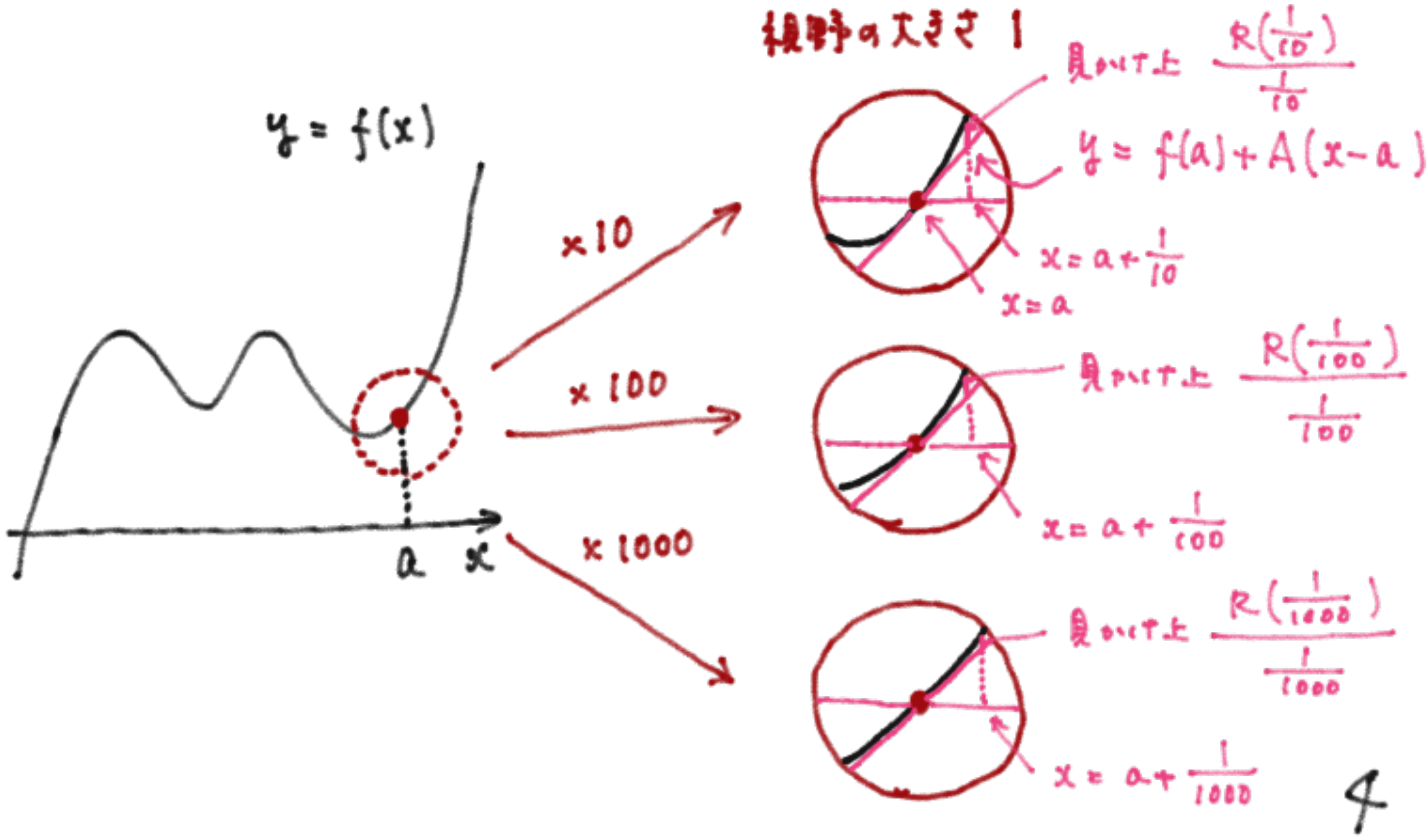
$$\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h}=0$$

という1次近似ができる。これは直接確かめることもできる：

$$f(3+h)=(3+h)^2=9+6h+h^2,$$

$R(h)=h^2$ とおくと $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h}=\lim_{h\to 0}h=0.$

この計算をもって $f'(3)=6$ の証明としてもよい。



ランダウの記号 o

h の関数 $f(h)$, $g(h)$ があり，
$h \to 0$ のとき $f(h) \to 0$, $g(h) \to 0$ であるとする。

<u>定義</u> $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0$ であることを

$$f(h) = o(g(h)) \quad (h \to 0)$$ と書く。

またこのとき，$f(h)$ は $g(h)$ よりも <u>高位の無限小</u>
であるという。

「$h \to 0$」以外の場合についても同様の表記を
用いる。

微分係数の定義における (4.1), (4.2) は

$$f(a+h) = f(a) + Ah + o(h) \quad (h \to 0)$$

と表すことができる。

自然数 $k > l > 0$ に対して

$$x^k = o(x^l) \qquad (x \to 0).$$

実数 $\alpha > \beta > 0$ に対して

$$x^\alpha = o(x^\beta) \qquad (x \to +0).$$

さらに，$\forall \alpha > 0$ に対して

$$x^\alpha = o\left(\frac{1}{\log x}\right) \qquad (x \to +0).$$

また $$\frac{1}{\log x} = o\left(\frac{1}{\log|\log x|}\right) \quad (x \to +0).$$

“無限小”（$h \to 0$ のとき $f(h) \to 0$ となるような $f(h)$）にはこういうヒエラルキーがある．

注1．「$x^5 = o(x) = x^3$」のような書き方は禁止．

注2．大文字の O という記号もある（別の意味）ので，書くときも口頭でも区別する．

微分の諸公式の証明

例1. 積の微分法

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

[方法1]

$$\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \frac{f(a+h)g(a+h)}{h} - \frac{f(a)g(a+h)}{h} + \frac{f(a)g(a+h)}{h} - \frac{f(a)g(a)}{h}$$

$$= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot g(a+h) + f(a)\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$\longrightarrow f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad (h \to 0). \qquad \square$$

[方法2]

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R_1(h),$$

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)h + R_2(h),$$

$$R_1(h) = o(h), \quad R_2(h) = o(h) \quad (h \to 0).$$

$$
\begin{aligned}
&f(a+h)\,g(a+h) \\
&= f(a)g(a) + \left(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\right)h \\
&\qquad + \underline{f'(a)g'(a)h^2} \\
&\qquad \underline{+ R_1(h)\left(g(a) + g'(a)h\right)} \\
&\qquad \underline{+ R_2(h)\left(f(a) + f'(a)h\right) + R_1(h)R_2(h)}.
\end{aligned}
$$

ここで 〰〰 部は全体として $o(h)$ なので

$$
\begin{aligned}
f(a+h)\,g(a+h) &= f(a)g(a) \\
&\quad + \left(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\right)h + R(h),
\end{aligned}
$$

$$R(h) = o(h). \qquad \square$$

例2. 合成関数の微分法

$$\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

[方法1] h のかわりに Δx と書き,

$$
\begin{aligned}
f(a+\Delta x) - f(a) &= \Delta y \\
g(b+\Delta y) - g(b) &= \Delta z \quad (b = f(a))
\end{aligned}
$$

とおくと

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\Delta x \to 0). \quad \square$$

[方法2]　$b = f(a)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + R_1(h) \\
&= b + f'(a)h + R_1(h),
\end{aligned}
$$

$$g(b+k) = g(b) + g'(b)k + R_2(k),$$

$$R_1(h) = o(h) \quad (h \to 0),$$

$$R_2(k) = o(k) \quad (k \to 0).$$

ここで $R_1(h) = h S_1(h)$，$R_2(k) = k S_2(k)$ と表しておく．$S_1(h) \to 0$ $(h \to 0)$，$S_2(k) \to 0$ $(k \to 0)$ である．すると

$$
\begin{aligned}
g(f(a+h)) &= g\left(b + f'(a)h + h S_1(h)\right) \\
&= g(b) + \underline{g'(b)}\left(f'(a)h + \underline{h S_1(h)}\right) \\
&\qquad \underline{+ \left(f'(a)h + h S_1(h)\right) S_2\left(f'(a)h + h S_1(h)\right)}.
\end{aligned}
$$

～～～部は全体として $o(h)$ なので

$$g(f(a+h)) = g(b) + g'(b)f'(a)h + R(h),$$

$$R(h) = o(h). \qquad \square$$

◉ 1次近似による計算例

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$$

は，h が 0 に近いとき

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$

が「かなり良い」近似式であることを意味している．

例1. $\sin 47^\circ$ の近似．

$\sin$ について

$$\sin(a+h) = \sin a + (\cos a)h + o(h)$$
$$\approx \sin a + (\cos a)h.$$

$47^\circ = 45^\circ + 2^\circ = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{90}$ をこれに代入して

$$\sin 47^\circ \approx \sin\frac{\pi}{4} + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{90}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{90} = 0.73179\cdots.$$

例2. $\sqrt{26}$ の近似.

$f(x)=\sqrt{x}$ について

$$\sqrt{a+h}=\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}h+o(h)$$

$$\approx\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}h.$$

これに $26=25+1$ を代入して

$$\sqrt{26}\approx\sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot 1$$

$$=5+\frac{1}{10}\cdot 1=5.1.$$

$26=36-10$ などとするとどうなるのか?

$$\sqrt{26}\approx\sqrt{36}+\frac{1}{2\sqrt{36}}\cdot(-10)$$

$$=6-\frac{1}{12}\cdot 10=5.166\cdots.$$

誤差評価をきちんと与えるためには, 平均値の定理やテイラーの定理が必要となる.