

課題 (課題 4.1 は CLE のテスト機能を使って解答してください。課題 4.2 は CLE の掲示板に投稿してください。)

課題 4.1 教科書の演習問題の間 6.2 について述べた以下の文章の空欄を埋めてください。

1 次近似を用いて $\cos 63^\circ$ の近似値を求める。 $\cos x$ の $x = a$ における 1 次近似は

$$\cos(a+h) \approx \cos a + (-\sin a)h$$

である。 $63^\circ = 60^\circ + 3^\circ = \pi/3 + \pi/60$ とみて、上の式に $a = \pi/3$, $h = \pi/60$ を代入すると (小数第 5 位まで求めてください)

$$\cos 63^\circ \approx \cos \frac{\pi}{3} + \left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{60} = \frac{1}{\boxed{}} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{\boxed{}}\right) \cdot \frac{\pi}{60} = 0.\boxed{}\dots$$

真の値は教科書によれば $0.45399\dots$ で、相対誤差は約 0.1% である。

次に、1 次近似を用いて $\sqrt[3]{28}$ の近似値を求める。 $\sqrt[3]{x}$ の $x = a$ における 1 次近似は

$$\sqrt[3]{a+h} \approx \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3a^{2/3}}h$$

である。 $28 = 27 + 1$ とみて、 $a = 27$, $h = 1$ を代入すると (小数第 5 位まで求めてください)

$$\sqrt[3]{28} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3 \cdot 27^{2/3}} \cdot 1 = 3 + \frac{1}{27} \cdot 1 = 3.\boxed{}\dots$$

真の値は教科書によれば $3.03658\dots$ であり、相対誤差は約 0.01% である。

後者についてさらに工夫してみる。 $28 = 3.03^3 + 0.181873$ とみて、1 次近似の式に $a = 3.03^3$, $h = 0.181873$ を代入すると (小数第 5 位まで求めてください)

$$\sqrt[3]{28} \approx 3.03 + \frac{1}{3 \cdot 3.03^2} \cdot 0.181873 = 3.\boxed{}\dots$$

相対誤差は約 0.0007% となる。

課題 4.2 以下の問題をすべて解いてください。その上で、(1) または (2) の小問 8 問のうちいずれか一つを選び、CLE の掲示板で解答してください。

(1) 任意の実数 $\alpha > 0$ に対して

$$x^\alpha = o\left(\frac{1}{\log x}\right) \quad (x \rightarrow +0)$$

であること、また

$$\frac{1}{\log x} = o\left(\frac{1}{\log|\log x|}\right) \quad (x \rightarrow +0)$$

であることを証明してください。

(2) 教科書の演習問題の間 6.1, 6.4.